

PREDICCIÓN DE LA SERIE TEMPORAL DEL  
CAMPO DE VELOCIDAD DE VIENTO  
SOBRE TOPOGRAFÍA COMPLEJA  
APLICACIÓN A LA ZONA SUR DEL URUGUAY

CARLOS LOPEZ VAZQUEZ

TRABAJO PRESENTADO PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE MAGISTER EN  
MECÁNICA DE LOS FLUIDOS APLICADA

FACULTAD DE INGENIERÍA  
MONTEVIDEO, URUGUAY  
JULIO DE 1993



PREDICCIÓN DE LA SERIE TEMPORAL DEL  
CAMPO DE VELOCIDAD DE VIENTO  
SOBRE TOPOGRAFÍA COMPLEJA  
APLICACIÓN A LA ZONA SUR DEL URUGUAY

CARLOS LOPEZ VAZQUEZ

TRABAJO PRESENTADO PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE MAGISTER EN  
MECÁNICA DE LOS FLUIDOS APLICADA

Director del trabajo:  
Vicent Espert Alemany  
Unidad Docente de Mecánica de los Fluidos  
Universidad Politécnica de Valencia

JULIO DE 1993

TRIBUNAL EXAMINADOR:

DR. ING. RAFAEL GUARGA

DR. ING. HERMANN STEFFEN

PROF. JULIO BORGHI

DR. ING. VICENT ESPERT

## INDICE

1. Introducción	
1.1. Antecedentes del problema	1
1.2. Antecedentes de la modelación seleccionada	2
1.2.1. Formulación de las ecuaciones del problema	4
1.2.2. La función de interpolación	22
1.2.3. Análisis de componentes principales	29
2. Descripción del modelo a implementar	
2.1. Bases matemáticas del modelo seleccionado	33
2.2. Especificación del campo inicial	37
2.2.1. Interpolación con funciones de punto	38
2.2.2. Interpolación con funciones climatológicas	39
2.2.3. Estimación del viento en altura	46
2.3. Especificación de la grilla en la vertical	57
2.4. Tratamiento de datos por el Análisis de Componentes Principales	59
2.5. Calibración de los parámetros empíricos; Estimador del error	63
3. Validaciones efectuadas con campos de velocidad conocidos	
3.1. Escurrimientos potenciales	69
3.1.1. Casos bidimensionales	69
3.1.2. Casos tridimensionales	82
3.2. Escurrimientos sobre topografías reales	
3.2.1. Necesidad de una depuración de los datos	84
4. Resultados obtenidos	
4.1. Comparación con medidas de campo existentes	88
4.1.1. Campos de velocidad obtenidos	91
4.1.2. Ajuste de la distribución de velocidad	104
4.1.3. Ajuste obtenido en los histogramas del factor de capacidad	111
4.1.4. Ajuste de obtenido en las curvas de duración del factor de capacidad	126
4.1.2. Efecto del uso de menor número de términos en la reconstrucción	126
4.1.6. Ajuste obtenido con las series temporales	
5. Conclusiones	
6. Referencias y agradecimientos	

### Anexos:

- 1) Derivación de las ecuaciones de trabajo en coordenadas conformes, según la expresión de Traci *et al.*, 1978
- 2) Derivación de las ecuaciones de trabajo en coordenadas conformes, según la expresión de Bhumralkar *et al.*, 1980
- 3) Listado y período de los datos disponibles provenientes de las estaciones automáticas de la DNE

## INDICE DE FIGURAS

Fig. 1.1	Extrapolación del perfil de velocidad con la altura	9
Fig. 2.1	Función de estructura $\beta$ vs. distancia, y extrapolación polinomial	42
Fig. 2.2	Evolución de $\frac{\sigma^{\infty}}{\sigma^1}$ según la distancia, y ajuste con una exponencial	45
Fig. 2.3	Evolución de la correlación con la distancia y ajuste propuesto	47
Fig. 2.4	Ubicación de las estaciones con lectura tridiaria de presión	48
Fig. 2.5	a) Evolución de la tasa de inercia para el campo de presiones. b) Idem ponderado para destacar el efecto de las derivadas parciales	50
Fig. 2.6	Isobaras del campo medio de presiones	52
Fig. 2.7	Isolíneas del campo $\mathcal{P}_1(x,y)$ correspondiente al primer componente principal	53
Fig. 2.8	Isolíneas del campo $\mathcal{P}_2(x,y)$ correspondiente al segundo componente principal	54
Fig. 2.9	Isolíneas del campo $\mathcal{P}_3(x,y)$ correspondiente al tercer componente principal	55
Fig. 2.10	Esquema de la reconstrucción lineal del campo horario	60
Fig. 2.11	Ajuste de la nube de puntos en $R^n$ mediante un único componente principal (representación para $n=3$ )	64
Fig. 2.12	Evolución de la tasa de inercia para el campo de viento	65
Fig. 3.1	Vista de la topografía (en versión tridimensional) y del corte transversal, para el caso de la fuente puntual en corriente uniforme.	70
Fig. 3.2	Corte transversal del cálculo con topografía gruesa, usando coeficiente $q$ de Guo igual a cero	73

Fig. 3.3	Corte transversal del cálculo con topografía gruesa, usando coeficiente $q$ de Guo igual a uno	74
Fig. 3.4	Resultados del cálculo para la rampa, con la topografía gruesa.	76
Fig. 3.5	Resultados del cálculo para la rampa, con la topografía fina.	77
Fig. 3.6	Campo de velocidades para la rampa, obtenido con la topografía gruesa.	79
Fig. 3.7	Fuente y sumidero en una corriente uniforme. Se utiliza sólo la mitad superior como topografía.	80
Fig. 3.8	Campo de velocidades obtenido. Obsérvese lo irregular que resulta el campo en las fronteras abiertas	81
Fig. 3.9	Vista en perspectiva de la topografía tridimensional utilizada para el caso de una fuente puntual en una corriente uniforme. Las abscisas y ordenadas son los índices de la matriz de cotas.	83
Fig. 3.10	Efecto de un par de datos disparatados en el campo de velocidad media	86
Fig. 3.11	Idem anterior, pero removiendo los dos datos sospechosos	87
Fig. 4.1	Evolución del estimador de ajuste a lo largo del proceso de calibración automática.	90
Fig. 4.2	Campo de velocidades interpoladas utilizando una topografía con 60 km de resolución, para el caso de la velocidad media	92
Fig. 4.3	Campo de velocidades interpoladas utilizando una topografía con 60 km de resolución, para el caso del primer componente principal.	93
Fig. 4.4	Campo de velocidades interpoladas utilizando una topografía con 60 km de resolución, para el caso del segundo componente principal.	94
Fig. 4.5	Campo de velocidades interpoladas utilizando una topografía con 60 km de resolución, para el caso del tercer componente principal.	95

Fig. 4.6	Campo de velocidades interpoladas utilizando una topografía con 60 km de resolución, para el caso del cuarto componente principal.	96
Fig. 4.7	Campo de velocidades interpoladas utilizando una topografía con 6 km de resolución, para el caso de la velocidad media.	97
Fig. 4.8	Campo de velocidades interpoladas utilizando una topografía con 6 km de resolución, para el caso del primer componente principal.	98
Fig. 4.9	Campo de velocidades interpoladas utilizando una topografía con 6 km de resolución, para el caso del segundo componente principal.	99
Fig. 4.10	Campo de velocidades interpoladas utilizando una topografía con 6 km de resolución, para el caso del tercer componente principal.	100
Fig. 4.11	Campo de velocidades interpoladas utilizando una topografía con 6 km de resolución, para el caso del cuarto componente principal.	101
Fig. 4.12	Subdivisión del dominio realizada para poder utilizar una topografía con 4 km de resolución, para el caso del quinto componente principal.	102
Fig. 4.13	Subdivisión del dominio realizada para poder utilizar una topografía con 4 km de resolución, para el caso del sexto componente principal.	103
Fig. 4.14	Comparación del histograma de velocidad calculado vs. el medido en las estaciones utilizadas en el proceso de calibración automática. Topografía definida cada 60 km	105
Fig. 4.15	Comparación del histograma de velocidad calculado vs. el medido en las estaciones utilizadas en el proceso de calibración automática. Topografía definida cada 30 km	106
Fig. 4.16	Comparación del histograma de velocidad calculado vs. el medido en las estaciones utilizadas en el proceso de calibración automática. Topografía definida cada 15 km	107

Fig. 4.17	Comparación del histograma de velocidad calculado vs. el medido en las estaciones utilizadas en el proceso de calibración automática. Topografía definida cada 6 km	108
Fig. 4.18	Comparación del histograma de velocidad calculado vs. el medido en las estaciones utilizadas en el proceso de calibración automática. Topografía definida cada 4 km	109
Fig. 4.19	Comparación del histograma de velocidad calculado vs. el medido en las estaciones no utilizadas en el proceso de calibración automática. Topografía definida cada 60 km	110
Fig. 4.20	Comparación del histograma de velocidad calculado vs. el medido en las estaciones no utilizadas en el proceso de calibración automática. Topografía definida cada 30 km	112
Fig. 4.21	Comparación del histograma de velocidad calculado vs. el medido en las estaciones no utilizadas en el proceso de calibración automática. Topografía definida cada 15 km	113
Fig. 4.22	Comparación del histograma de velocidad calculado vs. el medido en las estaciones no utilizadas en el proceso de calibración automática. Topografía definida cada 6 km	114
Fig. 4.23	Comparación del histograma de velocidad calculado vs. el medido en las estaciones no utilizadas en el proceso de calibración automática. Topografía definida cada 4 km	115
Fig. 4.24	Comparación de histogramas de factor de capacidad calculados vs. medidos en las estaciones testigo en el proceso de calibración automática. Topografía definida cada 60 km	116
Fig. 4.25	Comparación de histogramas de factor de capacidad calculados vs. medidos en las estaciones testigo en el proceso de calibración automática. Topografía definida cada 30 km	117

Fig. 4.26	Comparación de histogramas de factor de capacidad calculados vs. medidos en las estaciones testigo en el proceso de calibración automática. Topografía definida cada 15 km	118
Fig. 4.27	Comparación de histogramas de factor de capacidad calculados vs. medidos en las estaciones testigo en el proceso de calibración automática. Topografía definida cada 6 km	119
Fig. 4.28	Comparación de histogramas de factor de capacidad calculados vs. medidos en las estaciones testigo en el proceso de calibración automática. Topografía definida cada 4 km	120
Fig. 4.29	Comparación de histogramas de factor de capacidad calculados vs. medidos en las estaciones testigo no utilizadas en el proceso de calibración automática. Topografía definida cada 60 km	121
Fig. 4.30	Comparación de histogramas de factor de capacidad calculados vs. medidos en las estaciones testigo no utilizadas en el proceso de calibración automática. Topografía definida cada 30 km	122
Fig. 4.31	Comparación de histogramas de factor de capacidad calculados vs. medidos en las estaciones testigo no utilizadas en el proceso de calibración automática. Topografía definida cada 15 km	123
Fig. 4.32	Comparación de histogramas de factor de capacidad calculados vs. medidos en las estaciones testigo no utilizadas en el proceso de calibración automática. Topografía definida cada 6 km	124
Fig. 4.33	Comparación de histogramas de factor de capacidad calculados vs. medidos en las estaciones testigo no utilizadas en el proceso de calibración automática. Topografía definida cada 4 km	125
Fig. 4.34	Comparación de las curvas de duración del factor capacidad calculados vs. medidos en las estaciones testigo utilizadas en el proceso de calibración automática. Topografía definida cada 60 km	127

Fig. 4.35	Comparación de las curvas de duración del factor de capacidad calculados vs. medidos en las estaciones testigo utilizadas en el proceso de calibración automática. Topografía definida cada 30 km	128
Fig. 4.36	Comparación de las curvas de duración del factor de capacidad calculados vs. medidos en las estaciones testigo utilizadas en el proceso de calibración automática. Topografía definida cada 15 km	129
Fig. 4.37	Comparación de las curvas de duración del factor de capacidad calculados vs. medidos en las estaciones testigo utilizadas en el proceso de calibración automática. Topografía definida cada 6 km	130
Fig. 4.38	Comparación de las curvas de duración del factor de capacidad calculados vs. medidos en las estaciones testigo utilizadas en el proceso de calibración automática. Topografía definida cada 4 km	131
Fig. 4.39	Comparación de las curvas de duración del factor de capacidad calculados vs. medidos en las estaciones testigo no utilizadas en el proceso de calibración automática. Topografía definida cada 60 km	132
Fig. 4.40	Comparación de las curvas de duración del factor de capacidad calculados vs. medidos en las estaciones testigo no utilizadas en el proceso de calibración automática. Topografía definida cada 30 km	133
Fig. 4.41	Comparación de las curvas de duración del factor de capacidad calculados vs. medidos en las estaciones testigo no utilizadas en el proceso de calibración automática. Topografía definida cada 15 km	134
Fig. 4.42	Comparación de las curvas de duración del factor de capacidad calculados vs. medidos en las estaciones testigo no utilizadas en el proceso de calibración automática. Topografía definida cada 6 km	135

Fig. 4.43	Comparación de las curvas de duración del factor de capacidad calculados vs. medidos en las estaciones testigo no utilizadas en el proceso de calibración automática. Topografía definida cada 4 km	136
Fig. 4.44	Efecto del filtrado de los patrones de ruido en la reconstrucción del histograma de velocidades de las estaciones testigo utilizadas en la calibración. Se utilizaron 5 de 10 términos posibles. Topografía definida cada 6 km.	137
Fig. 4.45	Efecto del filtrado de los patrones de ruido en la reconstrucción del histograma de velocidades de las estaciones testigo no utilizadas en la calibración. Se utilizaron 5 de 10 términos posibles. Topografía definida cada 6 km.	138
Fig. 4.46	Efecto del filtrado de los patrones de ruido en la reconstrucción del histograma del factor de capacidad en las estaciones testigo utilizadas en la calibración. Se utilizaron 5 de 10 términos posibles. Topografía definida cada 6 km.	139
Fig. 4.47	Efecto del filtrado de los patrones de ruido en la reconstrucción del histograma del factor de capacidad en las estaciones testigo no utilizadas en la calibración. Se utilizaron 5 de 10 términos posibles. Topografía definida cada 6 km.	140
Fig. 4.48	Efecto del filtrado de los patrones de ruido en la reconstrucción de la curva de duración del factor de capacidad en las estaciones testigo utilizadas en la calibración. Se utilizaron 5 de 10 términos posibles. Topografía definida cada 6 km.	141
Fig. 4.49	Efecto del filtrado de los patrones de ruido en la reconstrucción de la curva de duración del factor de capacidad en las estaciones testigo no utilizadas en la calibración. Se utilizaron 5 de 10 términos posibles. Topografía definida cada 6 km.	142
Fig. 4.50	Comparación entre los módulos de velocidad medidos y calculados para el mismo instante	144
Fig. 4.51	Histograma del error en dirección entre la velocidad medida y calculada para el mismo instante	145

## INDICE DE TABLAS

Tabla 3.1	Valores obtenidos para el ajuste del caso a) con una grilla gruesa	71
Tabla 3.2	Valores obtenidos para el ajuste del caso a) con con grilla fina	72
Tabla 3.3	Valores obtenidos para el ajuste del estudio de la fuente puntual en una corriente uniforme. Caso bidimensional.	78
Tabla 3.4	Valores obtenidos para el ajuste del estudio de la fuente puntual en una corriente uniforme. Caso tridimensional.	82
Tabla 3.5	Fragmento de las lecturas de la estación automática de Cordillera. Las últimas tres cifras indican el módulo de la velocidad en km/h	85

**PREDICCIÓN DE LA SERIE TEMPORAL DEL  
CAMPO DE VELOCIDAD DEL VIENTO SOBRE TOPOGRAFÍA COMPLEJA.  
APLICACIÓN A LA ZONA SUR DEL URUGUAY**

**1. INTRODUCCIÓN**

**1.1. Antecedentes del problema**

En abril de 1988, la UTE (Administración Nacional de Usinas y Transmisiones Eléctricas) acordó con la Facultad de Ingeniería (Universidad de la República, Montevideo, Uruguay) de realizar estudios tendientes a la evaluación primaria del recurso energético de origen eólico.

Como parte de los trabajos a realizar, se debía establecer una predicción de la serie temporal de velocidad de viento en zonas donde no había registros meteorológicos previos.

Tal situación ha sido frecuente en este tipo de estudios (Traci et al., 1978, Bhumralkar et al., 1980, Endlich et al., 1982, etc.) debido a que las zonas más interesantes desde el punto de vista del potencial eólico están sobre topografías complejas y las estaciones meteorológicas se ubican en puertos, aeropuertos o ciudades, normalmente alejadas de las mismas.

Por ello, y teniendo en cuenta la experiencia acumulada en el tema, se decidió desarrollar un estudio basado en una combinación inédita de técnicas: una modelación matemática del campo de velocidades de viento, válida para la mesoescala, y una modelación física, válida para la microescala meteorológica.

La primera permite, partiendo de las series rutinarias de datos de viento tomadas en zonas alejadas de la topografía compleja, predecir series de valores en la misma o próximas a ella. La segunda permite caracterizar los efectos locales, difícilmente abordables por el modelo matemático, tales como niveles de turbulencia, aumentos de velocidad, etc.

Siguiendo en ello las observaciones de Druyan, 1985, las zonas a localizar o identificar como promisorias, deberán ser objeto de ulteriores análisis, que necesariamente incluirán medidas en sitio.

En el caso uruguayo se han venido realizando en forma independiente registros de algo más de un año de duración en múltiples sitios, la mayor parte ubicados en topografía compleja.

Esta monografía tiene como base los trabajos realizados para cubrir el primer objetivo: la modelación matemática del campo de velocidades en la mesoescala, y su aplicación al cálculo de la

serie horaria de velocidades de viento. A los efectos de la comparación, se han debido utilizar las predicciones obtenidas del trabajo en túnel de viento. Los resultados de la aplicación conjunta de las dos técnicas son comparados con las medidas obtenidas por la campaña ya referida.

## 1.2 Antecedentes de la modelación seleccionada

El trabajo de Druyan, 1985, contiene una adecuada revisión de las metodologías existentes para la identificación de sitios adecuados para la instalación de turbinas eólicas.

Entre tales metodologías se incluyen la inspección subjetiva, por parte de un experto, de las localizaciones potenciales, el análisis de indicadores geomorfológicos, como vegetales (árboles, etc.) o de otro tipo, la aplicación de modelos numéricos de viento en la mesoscala, etc. En general, el autor recomienda proceder en etapas, reservando para la última la implementación de equipamiento para el aprovechamiento de energía. Tal emprendimiento debe ser precedido, en la opinión de la mayoría de los autores, de una campaña de medidas intensiva en el o los sitios potencialmente interesantes.

El problema queda, pues, planteado en términos de cómo identificar el o los sitios en los cuales realizar medidas.

Dado que la campaña de medidas insume típicamente un año o más, toda decisión para la implementación de generadores tiene una demora inherente de ese orden. Lo importante es determinar los sitios más promisorios, con la mayor precisión posible, de forma que disminuya la posibilidad de realizar una campaña de medidas en un sitio inadecuado.

Debido al hecho de que los datos meteorológicos son usualmente recogidos en aeropuertos, ciudades o parques dentro de las mismas, y en general, zonas donde el viento está fuertemente afectado por las edificaciones próximas (López y Acosta, 1989), estos registros son rara vez útiles para una estimación directa del recurso eólico. Por otra parte, son los únicos registros tomados sistemáticamente durante largos períodos.

Los sitios más adecuados para la explotación del recurso eólico, tal como lo muestran prácticamente todos los autores (ver los trabajos de Endlich et al., 1982, Traci et al., 1978, Druyan, 1985, etc.), están usualmente en terrenos con suaves ondulaciones, tipo cerros o cuchillas. Estas zonas son típicamente excluidas de las redes meteorológicas tradicionales, por lo que no hay registros directos en la cima de las mismas.

Una excepción en el Uruguay se dio en la década del 60, al realizar el Ing. Emmanuelle Cambilargiu estudios específicamente eoloenergéticos, habiendo instalado un registrador en la cima de, entre otros, el cerro de San Antonio, Piriápolis. El Ing.

Cambilargiu era en ese momento Jefe del Laboratorio de Aerodinámica del Instituto de Máquinas de la Facultad de Ingeniería, del cual es el Instituto de Mecánica de los Fluidos e Ingeniería Ambiental (IMFIA en lo que sigue) su sucesor.

La Dirección Nacional de Energía (DNE en lo que sigue), en conjunto con la Dirección Nacional de Meteorología (DNM en lo que sigue) ha llevado a cabo en forma independiente una campaña de medidas en terreno complejo, en la zona sur de la Cuchilla Grande, bajo la dirección del Dr. Vicente Barros, de la Universidad de Buenos Aires. Más adelante en este trabajo, los registros por ellos obtenidos serán comparados con las predicciones realizadas, tanto para terreno complejo como para zonas llanas.

Para este proyecto es un objetivo primordial realizar una adecuada preselección de esos potenciales sitios.

Según Druyan, 1985, las metodologías aplicables para ello pueden clasificarse en *subjetivas* y *objetivas*. Entre las primeras, justificables solamente para regiones con muy baja densidad de datos meteorológicos, se ubican el análisis, por parte de un experto, de diversos indicadores, como los forestales, etc., que se han descartado en este caso.

Las segundas, por el contrario, no son dependientes de la pericia del analista. De entre ellas se mencionará globalmente:

- a) el método dinamarqués
- b) modelos derivados del uso de la ecuación de continuidad
- c) modelos basados en la ecuación de Navier-Stokes y algunas simplificaciones.

El primero de ellos (*Wind Atlas for Denmark* (Petersen, 1981), ha logrado predicciones con error del orden del 5% en la potencia teórica, en su aplicación al territorio dinamarqués. Su hipótesis fundamental de trabajo es que el viento en toda la zona de interés está explicado por una única corriente no perturbada, común a todo el territorio, que se desarrolla por encima de la capa de fricción. Las diferencias entre sitio y sitio se deben únicamente a su diferente rugosidad  $Z_0$ . Este viento se puede estimar a partir del campo de presiones, y es posible extrapolar su valor de superficie asumiendo un perfil logarítmico, función a su vez de  $Z_0$  y de la estabilidad atmosférica. El cálculo es fuertemente dependiente del sitio, y requiere una ajustada estimación de  $Z_0$  para cada rumbo en cada sitio potencial.

Su implementación en el caso uruguayo no apareció como posible, por el tipo de dato meteorológico requerido (registros de presión atmosférica cada 3 hs.; perfil de viento y temperatura hasta una altura de 150 m, etc.) que en principio no están disponibles. El modelo produce como resultados los parámetros de

la distribución de Weibull en cualquier punto del dominio geográfico. No hay evidencia de la habilidad de este método para reproducir los efectos de una topografía compleja.

En la segunda categoría pueden ubicarse varios trabajos, con matices que los distinguen. Todos ellos utilizan la topografía compleja y datos de viento tomados de las estaciones meteorológicas. El resultado es un campo de velocidades, ajustado al terreno, y que cumple la condición de continuidad.

Son ejemplos de este enfoque, los trabajos de Traci et al., 1978, Bhumralkar et al., 1980, y Endlich et al., 1982 trabajos éstos que fueron desarrollados con un fin específicamente eoloenergético. También hay en la literatura, aplicaciones de este concepto, al caso de la dispersión de contaminantes. Como ejemplos, se pueden citar los trabajos de Sherman, 1978, Goodin et al., 1980, Moussiopoulos et al., 1988, Ross et al., 1988, Guo et al., 1990, etc.

En su aplicación se han obtenido resultados de una precisión razonable, si bien menor que aquella del Atlas Dinamarqués. Por ello se recomienda, en cualquier caso, realizar una campaña de medidas en el/los sitio/s preseleccionado/s, previo a decidir la instalación de un aerogenerador en el mismo. La metodología para ello no es tema de este trabajo, pero se estima adecuada la llevada a cabo por el Dr. Vicente Barros con personal de la DNE y DNM, y que se encuentra resumida en la literatura (Barros et al., 1981 y Barros et al., 1983).

Con respecto a la tercera categoría, es pertinente observar que si bien existen modelos más sofisticados para predecir el campo de velocidades dentro de la capa límite atmosférica, ellos son de difícil aplicación para la prospección eólica. Las razones son, fundamentalmente, dos: 1) el volumen, calidad y tipo de datos meteorológicos requeridos, y 2) el alto costo en tiempo de computadora involucrado, que hacen o imposible, o poco práctico su uso para la predicción de series anuales de velocidad.

Ello ha inhibido de considerar en principio otras modelaciones más complejas que las citadas en segundo término. Como se verá, los datos requeridos son modestos, así como el esfuerzo de cálculo.

### 1.2.1 Formulación de las ecuaciones del problema

El modelo sobre el cual se trabajará reconoce como antecedentes los trabajos de Sasaki, 1970a y 1970b.

El autor presenta allí un estudio teórico en el que se analizan formas matemáticamente posibles de modificar un campo interpolado a partir de observaciones en puntos aislados, con objeto de satisfacer exacta o aproximadamente ecuaciones

fundamentales del escurrimiento, como por ejemplo la de continuidad.

Para el primer caso, Sasaki propone minimizar el funcional

$$J(\varphi) = \int_{\Omega} \left[ \sum_1 \tilde{\alpha}_1 (\varphi - \tilde{\varphi}_1)^2 + \lambda \cdot \mathcal{S}(\varphi_1, \varphi_j, \partial_t \varphi_1, \partial_{xk} \varphi_1, \partial_{xk} \varphi_j) \right] d\Omega \quad (1.1)$$

siendo:

- $\tilde{\alpha}_1$  pesos arbitrariamente prefijados.
- $\tilde{\varphi}_1$  campo observado y/o interpolado.
- $\lambda$  multiplicador de Lagrange.
- $\mathcal{S}$  condición a mantener estrictamente igual a cero.
- $\varphi$  campo incógnita.
- $\varphi_t$  derivada parcial respecto al tiempo del campo incógnita
- $\Omega$  dominio de integración.

Por convención, Sasaki designa a este caso como el de la *restricción fuerte*.

Para satisfacer aproximadamente la ecuación  $\mathcal{S} = 0$ , el autor propone otra forma para el funcional  $J(\varphi)$

$$J(\varphi) = \int_{\Omega} \left[ \sum_1 \tilde{\alpha}_1 (\varphi - \tilde{\varphi}_1)^2 + \alpha \cdot \mathcal{S}(\varphi_1, \varphi_j, \partial_t \varphi_1, \partial_{xk} \varphi_1, \partial_{xk} \varphi_j)^2 \right] d\Omega \quad (1.2)$$

siendo ahora  $\alpha$  otro peso predeterminado, y no un multiplicador de Lagrange. Sasaki designa a este caso como el de la *restricción débil*.

Como se verá, en toda la literatura analizada fue adoptada la opción de la restricción fuerte, utilizando la condición de continuidad como la función  $\mathcal{S}$ .

Liu et al., 1976, también desarrolló un algoritmo que interpola valores medidos, y los así calculados cumplen dos condiciones:

- a) Verifican la ecuación de continuidad
- b) Coinciden con los medidos en las coordenadas de las estaciones meteorológicas.

A los efectos, diseñó un algoritmo recursivo que actúa sobre la ecuación de continuidad integrada en la vertical

$$\frac{\partial(u.h)}{\partial x} + \frac{\partial(v.h)}{\partial y} = D \quad (\text{bajo la hipótesis que } \frac{\partial h}{\partial t} \sim 0)$$

A partir de los valores inicialmente interpolados, se van corrigiendo u y v con objeto de disminuir D. La estimación de las derivadas parciales se basa en discretizaciones de 4 y de 8 puntos.

Para la interpolación inicial el autor utiliza una ponderación con pesos  $1/r^2$ , siendo r a la distancia entre el punto a interpolar y la estación de medida. Sólo la aplica dentro de un radio de influencia de 12 Km.

En el trabajo citado se comparan los resultados con otros dos algoritmos: uno debido a Dickerson (que se analizará más adelante) y otro de vorticidad constante. En estos casos el autor observa que el campo calculado ocasionalmente difiere mucho del medido.

Sherman, 1978, desarrolló un modelo (MATHEW) cuyo fin era servir de apoyo para estudios de dispersión de contaminantes con el programa ADPIC.

MATHEW (MASS consistent, THREE dimensional Wind field) aproxima un campo de velocidad tridimensional interpolado utilizando datos meteorológicos disponibles, haciéndole cumplir la ecuación de continuidad. Este modelo incorpora como dato la topografía.

Además asume densidad constante, lo que no parece ser un serio inconveniente dado el tamaño de las zonas modeladas ( $\approx 100\text{Km} \times 100\text{Km} \times 2\text{Km}$ ) y las velocidades involucradas. No es, sin embargo, un requisito esencial. Endlich et al., 1982, comprobó luego que al incorporar una ley de variación de la densidad con la altura los efectos eran despreciables.

El modelo está formulado en coordenadas naturales, y las ecuaciones a resolver se presentan en un sistema de coordenadas euleriano.

Su hipótesis de trabajo es que dado un campo interpolado de alguna manera a los nodos de una grilla tridimensional, (campo que se asume es una buena aproximación del real), se realicen al mismo pequeñas modificaciones tendientes a hacerlo solenoidal.

El algoritmo provee directamente el resultado sin recalcular el campo inicial, dado que no tiene carácter de semilla.

El criterio aplicado es que el funcional

$$\mathcal{F}(u, v, w) = \int_V \left[ \alpha_1^2 (u - u_0)^2 + \alpha_1^2 (v - v_0)^2 + \alpha_2^2 (w - w_0)^2 \right] dV \quad (1.3)$$

sea mínimo para el  $(u, v, w)$  sujeto a que el mismo sea solenoidal. Los subíndices cero corresponden al campo interpolado, y dependen esencialmente de los datos meteorológicos.

Para resolver esto, Sherman recurre a la propuesta de Sasaki ya mencionada. La minimización de una integral de la varianza de la diferencia entre el campo buscado y el "observado" es posible si el número de restricciones fuertes es menor que el de las variables (1 frente a 3, en este caso), de acuerdo con Sasaki.

El funcional  $\mathcal{F}$  se minimiza por el método de los multiplicadores de Lagrange, incorporando como restricción fuerte la conservación de masa (se asume fluido incompresible)

$$\mathcal{F} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.4)$$

$\alpha_1, \alpha_2$  se estiman teniendo en cuenta la desviación entre el campo interpolado y el calculado. Así, Sherman toma  $\alpha_1$  del orden de

$$\alpha_1^2 = \frac{1}{2} \sigma^{-2}, \quad \sigma = 0.25 \sqrt{\overline{(u-u_0)^2 + (v-v_0)^2}} \quad (1.5)$$

indicando con la barra horizontal la media temporal.  $\alpha_2$  es asignado en forma similar, resultando

$$\alpha_2^2 = \frac{1}{2} \sigma^{-2}, \quad \sigma = \sqrt{\overline{(w-w_0)^2}} \quad (1.6)$$

Nótese que los términos del tipo  $\overline{(u_1 - u_{10})^2}$  no son conocidos hasta después de realizado el cálculo sobre todos los eventos del período. No está claro, entonces, como procedió Sherman para su determinación. La especificación de los parámetros  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  es un tema en que los autores han seguido trabajando, como se verá.

Seguendo a Sasaki, se plantea que

$E(u, v, w, \lambda) =$

$$= \int_V \left[ \alpha_1^2 (u-u_0)^2 + \alpha_1^2 (v-v_0)^2 + \alpha_2^2 (w-w_0)^2 + \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] dV \quad (1.7)$$

sea mínimo.

Más adelante se demuestra que la condición de mínimo se da para

$$u = u_0 + \frac{1}{2\alpha_1^2} \frac{\partial \lambda}{\partial x}; \quad v = v_0 + \frac{1}{2\alpha_1^2} \frac{\partial \lambda}{\partial y}; \quad w = w_0 + \frac{1}{2\alpha_2^2} \frac{\partial \lambda}{\partial z} \quad (1.8)$$

Si estas relaciones se incorporan en la condición de continuidad, resulta la siguiente ecuación para  $\lambda$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2\alpha_1^2} \frac{\partial \lambda}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{2\alpha_1^2} \frac{\partial \lambda}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{2\alpha_2^2} \frac{\partial \lambda}{\partial z} \right) = - \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z} \right) \quad (1.9)$$

Por ser ésta una ecuación de segundo orden, se puede imponer a la solución en el borde condiciones para el valor de la misma (condición de Dirichlet) o para su derivada normal (condición de Neumann), pero no para ambas a la vez.

Sherman adopta como hipótesis que las fronteras laterales son "abiertas", y que el terreno y el "techo" del dominio son superficies de corriente.

En las fronteras abiertas se impone  $\lambda = \text{constante} = 0$ , condición que tiene el inconveniente de no ajustar las componentes tangenciales a la frontera, como se verá.

En las superficies de corriente, en cambio, se debe imponer  $\frac{\partial \lambda}{\partial n} = 0$ . Si la velocidad observada cumplía  $\frac{\partial V_0}{\partial n} = 0$ , entonces también se cumplirá para la velocidad ajustada.

Como se dijo, aparecen efectos perturbadores debido a la condición en la frontera abierta. Así, y a modo de ejemplo, para el caso de un dominio con una frontera  $\varphi_1$  sobre la que  $x = X(\varphi_1) = \text{cte.}$  en la que se impone  $\lambda(x, y, z) = 0$ , puede ser  $\frac{\partial \lambda}{\partial x} \neq 0$ . De ello, y teniendo en cuenta la ecuación (1.8), resulta  $u|_{\text{borde}} \neq u_0|_{\text{borde}}$ .

Al permitirse que se ajuste el valor de  $u|_{\text{borde}}$  puede corregirse la masa entrante y saliente al dominio, condición indispensable para lograr que  $(u, v, w)$  sea solenoidal local y globalmente.

En cambio, sobre la misma frontera  $\varphi_1$  serán nulas  $\frac{\partial \lambda}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial \lambda}{\partial z}$ , lo cual inhibe al algoritmo de ajustar los valores de  $v$  y  $w$ .

Ello tiene efectos perturbadores fácilmente ejemplificables. Si el campo  $V_0$  es no uniforme, pero unidireccional, y la frontera  $\varphi_1$  es oblicua a tal campo, el ajuste, proporcional a  $\frac{\partial \lambda}{\partial x}$ , tiene efecto sólo en la normal al plano. El ajuste tangencial al plano es cero, pues se hizo  $\frac{\partial \lambda}{\partial y} = \frac{\partial \lambda}{\partial z} = 0$ .

El resultado definitivo rompe la característica de unidireccional, por el mero hecho de tener una condición de frontera inapropiada. Este fenómeno ya fue observado por otros investigadores.

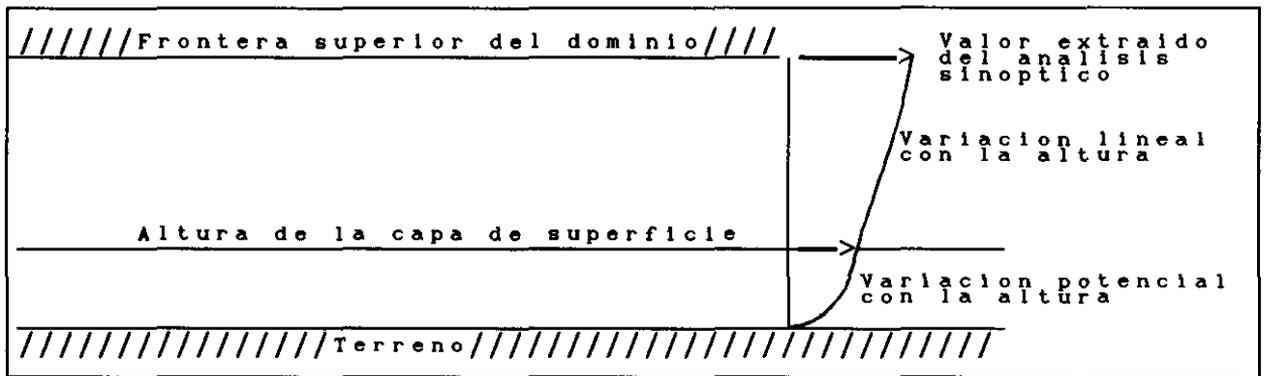


Fig. 1.1 Extrapolación del perfil de velocidad con la altura

Sherman hace notar que esto permite imponer flujos entrantes o salientes al dominio, propiedad que puede ser muy interesante para eliminar el problema con la otra condición de borde.

Para la determinación de  $V_0$ , este autor usa una media ponderada con  $1/r^2$  en la horizontal, y la ley potencial en parte de la vertical. El exponente es ajustado teniendo en cuenta la estratificación atmosférica. La velocidad vertical es inicializada en cero, valor que es válido para una atmósfera casi neutra. Se asume que

$$\left( \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right)^2 \sim \left( \frac{w}{u} \right)^2 \sim 10^{-4} \quad (1.10)$$

Para la interpolación-extrapolación en la vertical, se utilizó el esquema de la fig. 1.1.

Para la altura de la capa de superficie se adoptó 100 m, y para el perfil potencial se utilizó un exponente de 1/7.

El trabajo de Sherman, ampliamente citado en la literatura, no fue validado por la autora con medidas de campo. Sí menciona que, usado en conjunto con ADPIC, los resultados para los trazadores fueron razonables (errores de hasta el doble en el 50 % de los casos, y un orden de magnitud en el 90 %).

Dickerson, 1978, presenta MASCON, modelo también conservativo, destinado asimismo a proveer de un campo de velocidades adecuado a modelos de dispersión. Como dato de entrada utiliza medidas de viento de superficie y de la altura de la capa de inversión.

A diferencia de otras formulaciones, opera sobre una versión integrada de la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} + w = 0 \quad (1.11)$$

siendo

w la velocidad saliente a la altura de la capa de inversión, (supuesta horizontal) normal a la misma. Por ello, resulta  $w = w(x,y)$ ;  $w \neq w(z)$

h altura de la capa de inversión, variable tanto en el espacio como en el tiempo.

u,v velocidades promediadas en la altura.

Al igual que Sherman (1978), Dickerson se apoya en el concepto de variacional presentado por Sasaki (1970). La forma del funcional particular es algo diferente, y no debe confundirse la nomenclatura

$$\mathcal{E}(u, v, w, \lambda) =$$

$$= \int_{\Omega} \left[ \alpha_1^2 (u - u_0)^2 + \alpha_1^2 (v - v_0)^2 + \alpha_2^2 (w - w_0)^2 + \lambda \left( \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + w \right) \right] d\Omega \quad (1.12)$$

con la notación  $u \equiv u h$ ;  $v \equiv v h$ . De la minimización de este funcional resulta una ecuación para la variable  $\lambda$  del tipo de la de Poisson, ligeramente diferente a la de Sherman

$$\frac{1}{2\alpha_1^2} \left( \frac{\partial^2 \lambda}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial^2 y} \right) - \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2} \lambda = - \left( \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + w_0 \right) \quad (1.13)$$

$\left( \alpha_2 / \alpha_1 \right)$  tiene ahora dimensiones de  $L^{-2}$ , cuando en el trabajo de Sherman era adimensional. Los valores que recomienda, alcanzan los  $10^{-9} m^{-2}$ .

La velocidad vertical en el tope de la capa de inversión resulta ser

$$w = w_0 - \frac{1}{2\alpha_2^2} \lambda \quad (1.14)$$

La interpolación inicial, necesaria para calcular los valores con subíndice cero, la realiza mediante una ley exponencial combinada con un radio de influencia variable, de acuerdo con

$$u_0 = \frac{\sum_{i=1}^N u_i \exp(-0.1 r_i^2)}{\sum_{i=1}^N \exp(-0.1 r_i^2)} \quad (1.15)$$

Similar fórmula para  $v$ . La sumatoria alcanza sólo a las  $N$  estaciones más próximas, independientemente de su distancia. Ello de hecho, permite tener en cuenta la densidad alta o baja de estaciones. En este trabajo, el autor adopta para  $N$  el valor de 3.

Traci et al. (1978) presenta un modelo que denomina NOABL, del tipo de interpolación objetiva, junto con un código de ecuaciones primitivas denominado SIGMET. El suyo es un trabajo ampliamente citado en la bibliografía, como se verá. Es el primero de los analizados cuyo objetivo es la identificación de sitios potenciales para explotaciones de energía eólica.

Traci obtiene su ecuación de trabajo tomando un punto de partida diferente al de Sherman (trabajo que conoce y cita, por cierto).

El autor sostiene que, bajo la hipótesis de que la fricción interna debida a efectos viscosos es despreciable, y que el escurrimiento es no estratificado, la circulación se conserva.

Tal circulación viene dada por la interpolación inicial (cualquiera que sea) asociada al campo  $V_0$ , que es divergente.

A este campo, Traci sugiere hacerle una corrección irrotacional (para no alterar la circulación) y tal que haga solenoidal al campo suma. O sea, si se denomina  $V$  al campo corrección buscado, el mismo debe cumplir

$$\begin{cases} \nabla \cdot (V^* + V_0) = 0 \\ \nabla \wedge (V^* + V_0) = \nabla \wedge V_0 \quad \therefore \nabla \wedge V^* = 0 \end{cases}$$

De la segunda condición se deduce que existe  $\phi$  tal que

$$u^* = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v^* = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad w^* = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (1.16)$$

y al imponerle la condición del balance de masa, resulta

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = - \nabla \cdot V_0 \quad (1.17)$$

Para tener en cuenta la estratificación y la desviación respecto a las condiciones de estabilidad neutra, Traci propone afectar a la ecuación de trabajo con coeficientes  $\tau_H$  y  $\tau_v$ , a determinar, de forma que

$$u^* = \tau_H \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v^* = \tau_H \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad w^* = \tau_v \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (1.18)$$

Con este cambio se llega a una expresión formalmente idéntica a la de Sherman, a saber:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \tau_H \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \tau_H \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \tau_v \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = - \nabla \cdot V_0 \quad (1.19)$$

En lo que respecta a las condiciones de borde, son las mismas que usa la citada autora.

Traci también utiliza una segunda formulación, basada en el uso de coordenadas conformes, siendo la coordenada vertical sigma definida como

$$\sigma = \frac{H - z}{H - h(x,y)} \quad (1.20)$$

Así, para  $\sigma=1$  se corresponde con el terreno, y para  $\sigma=0$  con el tope del dominio.  $H$  es el tope de la capa límite (que Traci supone constante) y  $h(x,y)$  es la cota del terreno.

En este sistema de coordenadas, la condición de impermeabilidad es simplemente  $\delta=0$ , tanto para  $\sigma=1$  como para  $\sigma=0$ . La ecuación de trabajo toma, por supuesto, una forma mucho más

compleja, que el autor resuelve por métodos iterativos. En el anexo se generaliza esta formulación para el caso en que el tope de la capa límite no sea plano.

En la línea de los trabajos concebidos para aplicaciones a energía eólica, se puede citar un aporte que Bhumralkar presentó en 1980 (Bhumralkar et al., 1980). En él, el autor desarrolla un programa, denominado COMPLEX que, esencialmente, es una variante del método de Sherman. Sus diferencias más importantes son:

- Usa como coordenada vertical una muy parecida a la utilizada por Traci, pero definida como

$$\sigma = \frac{z - h(x,y)}{H - h(x,y)} \quad (1.21)$$

con las mismas definiciones que antes.

La variable  $\sigma$  toma ahora valor 0 en el terreno y 1 en el techo del dominio.

En el nuevo sistema de coordenadas  $(x,y,\sigma)$  las "velocidades" son  $(u,v,\phi)$ . Las condiciones de borde son similares a las de Traci.

- Llega a ecuaciones formalmente similares a las de Sherman, definiendo nuevas variables  $u = u (H-h)$ ,  $v = v (H-h)$  y  $w = \phi (H-h)$ . Este aspecto será discutido más adelante.

Para resolver el sistema procede en forma diferente, eliminando explícitamente el multiplicador  $\lambda$ , trabajando sobre tres ecuaciones de Poisson en las variables  $u, v$  y  $w$ . Ello tiene como ventaja un mejor comportamiento numérico de la solución, pero al costo de triplicar el tiempo de cálculo. No detalla el tratamiento de las condiciones de borde.

- Usa un análisis de componentes principales, para obtener largas series temporales y calcular medias y otros estadísticos. Este tema será motivo de ulterior comentario.

- No incorpora ciclo diurno, que afecta a la forma del tope del dominio, comprobando sin embargo que ello generó importantes discrepancias en algún caso.

- Mediante el ajuste del parámetro  $\left(\alpha_1/\alpha_2\right)^2 \cong \left(\tau_H/\tau_V\right)^2$  el autor de hecho provoca que las superficies  $\sigma = \text{cte.}$  sean superficies de corriente, puesto que para el mismo recomienda  $10^{-12}$ . Ello, en el límite, permitiría considerar la evolución de cada una de ellas en forma independiente, tal como lo hace Goodin et al., 1980.

Este modelo ha ido evolucionando en el tiempo. Así Endlich (Endlich, et al., 1982), presenta algunos refinamientos, entre los que se incluyen los siguientes:

- $H(x,y)$  es ahora variable tanto en el espacio como en el tiempo, modelando así un ciclo diurno.
- Utiliza el valor de viento geostrófico para esa altura.
- Realiza una interpolación logarítmica entre piso y techo del perfil vertical de velocidades.
- Incorpora densidad variable con la altura.

El viento geostrófico no es medido directamente. En este trabajo se le calcula usando el método triangular propuesto por Endlich y Clark (1963), que consiste en asumir que el campo de presión está apropiadamente descrito con un plano determinado por los valores de tres estaciones únicamente. El viento geostrófico, se calcula así mediante una simple derivada (Pedlosky, 1987) bajo la hipótesis de equilibrio geostrófico.

$$u = -\frac{1}{f\rho_s r_o} \frac{\partial p}{\partial \theta} \quad v = \frac{1}{f\rho_s r_o \cos(\theta)} \frac{\partial p}{\partial \phi} \quad f = 2\Omega \sin(\theta) \quad (1.22)$$

donde  $\rho_s$  es la densidad estándar del aire,  $r_o$  el radio de la tierra,  $\theta$  la latitud y  $\phi$  la longitud.

Para la interpolación entre piso y techo, utiliza la expresión (válida también para la componente  $v$ )

$$u = u_a + (u_c - u_a) \frac{\log(z) - \log(z_a)}{\log(z_c) - \log(z_a)} \quad (1.23)$$

Esta formulación permite, a diferencia de la interpolación potencial, variaciones no solo en módulo sino también en dirección.

Para la altura de la capa de inversión, utiliza:

$$H(x,y) = H_m + k h(x,y) + (1-k) H_a \quad (1.24)$$

siendo  $H_m$  el promedio espacial del espesor de la capa límite, y  $H_a$  la cota promedio del terreno.

Con la adecuada elección del coeficiente  $k$  es posible lograr que la capa de inversión sea casi horizontal (respecto al nivel del mar) en la noche, y casi paralela al terreno durante el día. De todas formas, se impone un valor mínimo al espesor de la capa límite, que se elige menor que  $H_m$  pero mayor que 200 m.

Basado en una formulación similar con la citada, Goodin (Goodin *et al.*, 1980) presenta variantes en ciertos tópicos. Aduce ventajas sobre MATHEW (Sherman, 1978) al incorporar resolución variable en la vertical, y coordenadas conformes con el terreno, al igual que hizo Bhumralkar *et al.*, 1980.

El autor realiza un filtrado a la interpolación clásica de ley  $1/r^2$ . El método implica:

a) Interpolación de los datos disponibles, utilizando pesos  $1/r^2$ . Se aplica un radio de influencia, y tiene en cuenta, en forma separada, la existencia de barreras montañosas, para ignorar el aporte de algunas estaciones.

b) Aplicar a continuación un procedimiento no detallado en el cual, mediante una ecuación de Poisson, se ajusta el campo de viento interpolado.

c) Para los datos en altura (viento y temperatura) usa una interpolación con pesos  $1/r$  y no  $1/r^2$ , argumentando que resulta así más suave. Luego, para la altura de la capa de mezcla, aplica un filtro numérico:

$$h_{ij}^{n+1} = \frac{1}{5} \left( h_{ij}^n + h_{i-1,j}^n + h_{i+1,j}^n + h_{i,j-1}^n + h_{i,j+1}^n \right) \quad (1.25)$$

correspondiendo el superíndice  $n$  al número de veces en que se aplicó el filtro.

El autor define una velocidad vertical, en coordenadas  $(x, y, \sigma)$

$$W = w - u \left( \frac{\partial h}{\partial x} + \sigma \frac{\partial \Delta H}{\partial x} \right) - v \left( \frac{\partial h}{\partial y} + \sigma \frac{\partial \Delta H}{\partial y} \right) - \sigma \frac{\partial \Delta H}{\partial t} \quad (1.26)$$

siendo

$$\Delta H(x, y, t) = H(x, y, t) - h(x, y)$$

$\sigma \in [0, 1]$ , con las definiciones usuales.

La ecuación de continuidad resulta

$$\frac{\partial W}{\partial \sigma} + \frac{\partial (u \Delta H)}{\partial x} + \frac{\partial (v \Delta H)}{\partial y} = 0 \quad (1.27)$$

Con este método, el autor obtuvo valores demasiado grandes para  $W$  en el tope del dominio. Ello fue atribuido a que toda la divergencia residual se propagaba hacia "arriba".

Como alternativa, se propone reducir la divergencia en todo el volumen, con un procedimiento que involucra tres pasos:

1) La divergencia de cada nivel interpolado con  $u$  y  $v$  se reduce mediante un filtrado numérico, del tipo

$$u_{ij}^{n+1} = \frac{1}{5} \left( u_{ij}^n + u_{i-1,j}^n + u_{i+1,j}^n + u_{i,j-1}^n + u_{i,j+1}^n \right) (1 - \alpha_k) + \alpha_k u_{ij}^n \quad (1.28)$$

El parámetro  $\alpha_k$  (al que sólo se le asignan valores 0 y 1) permite fijar el valor leído en el caso en que  $ij$  coincida con las coordenadas de una estación. De ese modo, se respetan estrictamente los valores registrados en la misma. El número de filtrados depende de la estabilidad, siendo grande para atmósfera estable, y chico para el caso inestable.

Goodin afirma que al filtrar, la divergencia anómala se "disipa" en la propia capa, sin provocar velocidades grandes hacia arriba.

2) Luego del filtrado, se calculan las velocidades verticales por cada capa, velocidades que se mantendrán fijas. No se considera aporte alguno entre capas adyacentes.

3) Se opera por capas, mediante un algoritmo bidimensional que resuelve (para  $\Delta H = \text{cte.}$ ) haciendo correcciones que reduzcan la divergencia residual  $D_r(x,y,\sigma)$  a un nivel aceptable, definiéndose  $D_r(x,y,\sigma)$  como

$$D_r(x,y,\sigma) = \frac{\partial W}{\partial \sigma} + \frac{\partial(u\Delta H)}{\partial x} + \frac{\partial(v\Delta H)}{\partial y} \quad (1.29)$$

El algoritmo fue probado con casos con solución analítica, y para estudios de contaminación.

Endlich y Lee presentan un trabajo (Endlich et al., 1983), en el que mejoran el trabajo ya citado de 1982 en forma cuantitativa, introduciendo dos cambios:

a) El viento geostrófico se aplica al tope de la capa límite, o a una altura prefijada de 1 Km, la menor de las dos. Ello permite manejar casos en que el tope de la capa límite es sistemáticamente muy grande (2000 m o más), que provocan vientos de superficie demasiado bajos.

b) Se modifica en algo la formulación de la ecuación de trabajo, reteniendo todos los términos previamente despreciados. También, y lo que es más importante, se modifica el carácter de las superficies iso- $\sigma$ , que son ahora superficies de corriente. Por ello, el nuevo modelo (que denominan COMPLEX-2) es, en los hechos, bidimensional.

La corrección aplicada al campo inicial está constreñida a respetar la componente vertical del rotacional, siguiendo en ello la línea del trabajo de Traci, 1978.

En los hechos logran mejoras a las predicciones previamente efectuadas para sitios ubicados en zonas de transición entre desiertos y montañas, por ejemplo.

Como otro ejemplo de pequeñas variantes a introducir al modelo, se cita el trabajo de Erasmus (1986) en el que se consideran explícitamente diversas particularidades que no son bien tratadas a priori con el modelo citado. Por ejemplo, el caso de la separación del flujo en presencia de valles, el cambio abrupto de la rugosidad y la aceleración por presencia de agudas montañas, tienen un tratamiento especial en la definición de las condiciones iniciales y la operativa del propio modelo.

Erasmus sólo realiza la interpolación (e impone balance de

masa), en zonas donde no hay separación del flujo. También previene que, dado que se han despreciado los efectos térmicos frente a los mecánicos, la aplicación del modelo está restringida a valores de la velocidad del viento superiores a 3 m/s, en llano. En su caso, la zona de interés estaba ubicada en las islas Hawaii.

Es del caso destacar que este ajuste "tipo sastré" de la metodología es difícilmente extrapolable a otras zonas. En particular, es de escaso interés para zonas como las objeto de este estudio, relativamente poco quebradas.

En un trabajo orientado hacia estudios de dispersión, Moussiopoulos, et al., 1988 analiza conjuntamente el concepto de conservación del rotacional (similar al utilizado por Liu et al., 1976 y por Traci et al., 1978) y el de Sherman. Trabaja, desde el punto de vista numérico, con dos discretizaciones del operador laplaciano en el espacio  $(x, y, \sigma)$ ; una es de 15 puntos, y otra de 25. No explicita, sin embargo, la forma de éstos.

Así, el autor plantea trabajar simultáneamente con dos ecuaciones:

$$u = u_0 + \frac{\partial \lambda}{\partial x}, \quad v = v_0 + \frac{\partial \lambda}{\partial y}, \quad w = w_0 + \alpha \frac{\partial \lambda}{\partial z}, \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (1.30)$$

en lugar de operar con ellas y trabajar con  $\nabla^2 \lambda = -\nabla \cdot \mathbf{V}_0$ , como hacen todos los otros autores ya citados. Se denomina  $\alpha = \alpha_1 / \alpha_2$ .

El argumento que maneja es que al utilizar esta última formulación, no se satisface exactamente por parte de la solución discretizada la condición de divergencia nula. Tal hecho no ocurre si lo que se resuelve es un sistema en el cual se discretizan directamente las ecuaciones de partida. El caso usual le implica trabajar con un operador de 15 puntos, y el que se propone obliga a considerar 25. Otros autores recientemente han presentado aportes en este sentido, formulando el problema numérico con objeto de satisfacer exactamente la condición de continuidad (Ferragut et al., 1990).

Por otra parte, si bien otros han manejado también el concepto, el autor declara que ciertos parámetros pueden ajustarse teniendo en cuenta la estabilidad atmosférica.

Así, hace  $\left( \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right) = \alpha^2 = \mathcal{F}(St)$ , siendo  $St$  el número de Strouhal.

En lo relativo a la interpolación horizontal, continúa manejando la combinación con pesos  $1/r^2$ , aunque se introduce como alternativa una combinación con pesos exponenciales. Para los valores en altura, el autor utiliza sondeos disponibles.

Para la determinación del valor a utilizar para  $\alpha$ , deriva una

expresión basada en la conservación de energía en una línea de corriente. Definiendo un número de Froude local logra darle la forma de la ecuación clásica de penalización, tal como la usan aquellos autores.

Dado que el número de Froude se acerca a  $\infty$  para la condición neutra, el autor propone utilizar su recíproco (el número de Strouhal), definido como

$$\begin{aligned} \text{para } \frac{g}{\rho} \frac{d\rho}{dz} \geq 0 \quad St &= \frac{H}{U} \sqrt{\frac{g}{\rho} \frac{d\rho}{dz}} \\ \text{para } \frac{g}{\rho} \frac{d\rho}{dz} \leq 0 \quad St &= -\frac{H}{U \cdot t} ; \quad \frac{1}{t} = \sqrt{-\frac{g}{\rho} \frac{d\rho}{dz}} \end{aligned} \quad (1.31)$$

siendo  $\sqrt{\frac{g}{\rho} \frac{d\rho}{dz}}$  la así llamada frecuencia de Brünt-Väisälä y  $t$  la escala de tiempo de la flotación, que se deduce de medidas con sondas. Los valores obtenidos se asumen válidos para todo el dominio de integración.

Trabajando con estas expresiones, e incorporando algunas hipótesis, se propone para el parámetro  $\alpha$  la siguiente ley:

Para el caso neutro y estable ( $St \geq 0$ ):

$$\alpha^2 = 1 - \frac{St^4}{2} \left[ \sqrt{1 + \frac{4}{St^4}} - 1 \right] \quad (1.32)$$

Para el caso inestable ( $St \leq 0$ ), proponen (sin validación experimental) dos formulaciones alternativas: una de ellas

$$\alpha^2 = 1 \neq \mathcal{F}(St) ; \quad St \leq 0 \quad (1.33)$$

y la otra

$$\alpha^2 = \frac{1}{1 - \frac{St^4}{2} \left[ \sqrt{1 + \frac{4}{St^4}} - 1 \right]} ; \quad St \leq 0 \quad (1.34)$$

Obsérvese que  $\alpha$  es aún una constante para todo el dominio de integración (no es función de punto). Además, los órdenes de magnitud son sensiblemente diferentes a los propuestos por el resto de los autores. El valor  $\alpha$  igual a uno corresponde al flujo no estratificado.

Ross et al., 1988 desarrolló un modelo que denominó NUATMOS. El trabajo es contrastado únicamente contra casos teóricos (flujo potencial) o de laboratorio (túnel de viento y tanque de agua), pero tiene interés por sus comentarios.

Ross plantea como otros el problema en coordenadas  $(x, y, \sigma)$ , y la ecuación de trabajo a resolver es:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\sigma}{\pi} \frac{\partial \pi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \sigma} \right) \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x} - \frac{\sigma}{\pi} \frac{\partial \pi}{\partial x} \frac{\partial \lambda}{\partial \sigma} \right) + \\ & + \left( \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\sigma}{\pi} \frac{\partial \pi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \sigma} \right) \left( \frac{\partial \lambda}{\partial y} - \frac{\sigma}{\pi} \frac{\partial \pi}{\partial y} \frac{\partial \lambda}{\partial \sigma} \right) + \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \sigma^2} = \\ & = -\frac{2}{\pi} \left( \frac{\partial(\pi u_0)}{\partial x} + \frac{\partial(\pi v_0)}{\partial y} + \frac{\partial(\pi \tilde{\omega}_0)}{\partial \sigma} \right) \end{aligned} \quad (1.35)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\omega} &= \frac{-1}{\pi} \left( w + \sigma u \frac{\partial \pi}{\partial x} + \sigma v \frac{\partial \pi}{\partial y} \right); \\ \pi &= H(x,y) - h(x,y); \quad \sigma = \frac{H-z}{H-h} \end{aligned} \quad (1.36)$$

Esto resulta de minimizar el funcional con velocidades cartesianas  $(u,v,w)$ . Otros autores allí citados lo hacen respecto a las velocidades  $(u,v,\tilde{\omega})$ , lo que los lleva a un problema formalmente análogo al resuelto por Sherman (ver Anexo 2)

Para  $\alpha$  se sugieren valores más bien próximos a 1 (entre 1 y 0.1), diferentes a los de Sherman ( $\sim 0.01$ ). Sin embargo, se propone para el caso estudiado, una formulación en la que  $\alpha$  varía dentro del dominio, como

$$\alpha^2 = \begin{cases} 1 - a \cdot F_h^m, & z > H_c \\ 0, & z \leq H_c \end{cases} \quad (1.37)$$

siendo  $F_h = \frac{U_\infty}{N \cdot h}$

$N$  la frecuencia de Brünt-Väisälä y

$H_c$  la altura (a distancia infinita) de una línea de

corriente que termina en un estancamiento sobre la topografía compleja. Obsérvese que, en esta formulación,  $\alpha$  es función de punto, por lo que una de las hipótesis en la deducción de la expresión (1.35) es violada.

Para el parámetro  $a$  se selecciona 0.7, aproximando groseramente algunos resultados experimentales. Para el exponente  $m$ , se recomienda finalmente -0.5.

Guo (Guo et al., 1990) presenta un trabajo en el que introduce modificaciones a los modelos NOABL (Traci et al., 1978) y COMPLEX (Bhumralkar et al., 1980), incorporando nuevas definiciones de los niveles para la coordenada  $z$ .

Bhumralkar proponía una relación del tipo

$$\Delta z_n = h(x,y) \cdot \left( \sigma_{n+1} - \sigma_n \right) \quad (1.38)$$

en la cual el espesor de la capa es proporcional al espesor de la capa límite. Si de hecho, por ajuste de los parámetros  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ , se provocara que las superficies  $\sigma = \text{cte}$  fuesen superficies de corriente, el efecto de la topografía sería el mismo, independientemente de la altura.

Guo sugiere que se elija  $\Delta z_n$  de forma tal que el espesor entre capas aumenta según se acerca al tope de la capa límite, y que además, el efecto de la topografía sea despreciable cerca del mismo. Lo primero permite considerar de una manera más realista el efecto de la topografía, amplificando sus efectos cerca de la misma. Lo segundo, por el contrario, asegura que por encima del tope de la capa límite, efectivamente la topografía no tiene efectos. Guo propone así la expresión

$$\Delta z_n = \left( \sigma_{n+1} - \sigma_n \right) \cdot \left[ \bar{h} + C \left( 1 - \frac{n}{N} \right)^q \cdot \left( h(x,y) - \bar{h} \right) \right] \quad (1.39)$$

siendo:

$q$  un parámetro que varía entre 0 y 1 (para  $q = 0$ , coinciden ambas formulaciones). Se le vincula con la estratificación.

$N$  el número total de niveles

$h$  el valor local del espesor de la capa límite  $(H - h) \Big|_{(x,y)}$

$\bar{h}$  el promedio de  $h(x,y)$  en el dominio

$C$  es función de  $q$ , ya que  $\sum_{n=1}^{N-1} \Delta z_n = h$ .

Además, observa que dado un cierto conjunto de datos de entrada, el campo resultante (interpolado y luego modificado para eliminar la divergencia) puede pronosticar, en los puntos de medida, valores algo menores. Ello se corrige aplicando un coeficiente al campo interpolado, con objeto de ajustar aún más los valores al dato puntual. Obsérvese que la condición de solenoidal no se ve afectada por ese coeficiente.

En el modelo que se presentará se han combinado para resolver los detalles del flujo, un modelo físico encajonado dentro de un modelo matemático. Ello está lejos de ser la única posibilidad, y para ilustrar las alternativas se encuentran dos trabajos presentados recientemente.

Así, Trifonopoulos et al., 1990, usa también un procedimiento combinado, con un modelo "grueso" del tipo NOABL que produce campos de velocidades que toma luego un modelo  $k-\epsilon$  de dos dimensiones, con el que se resuelven los detalles.

En este trabajo, el primer modelo fue inicializado con una única estación, por lo que se pudo discretizar el problema en términos de dirección. Ello deja de ser posible para cuando los datos de entrada proceden de un grupo mayor de anemómetros. La estación utilizada distaba 200 Km del punto de interés.

De la combinación de estrategias, se pudo deducir que existía un alto nivel de turbulencia, así como un excesivo esfuerzo cortante, en el punto en el que se pensaba instalar los

eologeneradores.

Tombrou (Tombrou et al., 1990) presenta un procedimiento telescópico que trabaja siempre con el mismo modelo, y cuyo fin es economizar tiempo de cálculo, refinando solamente en los puntos de interés. El modelo utilizado es una derivación del NOABL.

El autor define el espesor local de la capa límite como un promedio representativo de su entorno. Ello obliga a modificarlo, cada vez que se altera la malla, incluso si el nodo pertenece a ambas.

Si para el primer cálculo se selecciona un mallado  $M_1$ , queda definido un campo  $H_1(x,y)$  para el espesor de la capa límite. Si se hace  $u_1 = u_0 + \nabla\varphi_1$ ,  $\varphi_1$  resultará de resolver el siguiente problema

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi_1 = -\nabla u_0 & \text{en } \Omega \\ (u_0 + u_1) \cdot \nabla f_i^1 = 0 & ; i=1,2 \\ \varphi_1 = \text{const.} & \text{en } [\partial\Omega - f_1^1 - f_2^1] \end{cases} \quad (1.40)$$

$f_1^1$  y  $f_2^1$  son las superficies impermeables. El superíndice indica la discretización que corresponde. La segunda condición de borde se aplica a las fronteras abiertas.

Una vez resuelto el problema en la malla  $M_1$ , se plantea una nueva malla  $M_2$ .

Definiendo  $u_2 = u_0 + \nabla\varphi_1 + \nabla\varphi_2$ ,  $\varphi_2$  resultará de resolver el problema modificado

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi_2 = -\nabla u_0 - \nabla^2 \varphi_1 & \text{en } \Omega \\ (u_0 + u_1 + u_2) \cdot \nabla f_i^2 = 0 & ; i=1,2 \\ \varphi_2 = \text{const.} & \text{en } [\partial\Omega - f_1^2 - f_2^2] \end{cases} \quad (1.41)$$

El miembro de la derecha  $(-\nabla u_0 - \nabla^2 \varphi_1)$  es cero en los nodos comunes de ambas grillas, y próximo a cero en el dominio en general.

El procedimiento es susceptible de refinar recursivamente la grilla. Los autores citan un caso en el que declaran haber reducido en una relación de 9 a 1 el tiempo de cálculo requerido.

Estos trabajos, muy recientes, muestran el aún activo interés en esta línea de la modelación de flujos atmosféricos.

### 1.2.2 La función de interpolación

En lo que se ha mostrado, la función utilizada para la determinación del campo interpolado  $V_0$  es en cierta medida arbitraria, dado que el algoritmo presentado no restringe su forma. Por lo tanto, este es un tópico de discusión, que permitiría mejorar las prestaciones del modelo. Se plantean a continuación diversas alternativas a la tradicional interpolación de ley  $1/r^2$  (usada por Sherman, 1978, Bhumralkar et al., 1978, Endlich et al., 1978, 1982, 1983, etc.)

Típicamente, el de la "correcta" interpolación de valores a partir de una serie discreta de puntos de medida, es un problema tradicional en meteorología, tanto en forma operacional como para la inicialización de modelos globales.

La bibliografía al respecto es muy amplia, y por ello se analizarán sólo algunos trabajos.

Por ejemplo, Haagenson et al., 1987, compara el desempeño de varios métodos: entre ellos una variante del de Cressmann, y el de interpolación óptima (debido a Gandin).

El método de Cressman fue presentado en 1959. Asume la existencia de una primera aproximación al campo buscado, quizá poco elaborada, y luego interpola no la magnitud misma, sino su diferencia respecto a la aproximación.

Dados  $n$  registros de la variable diferencia  $D_k$  tomados dentro de un radio de influencia  $RI$  en  $n$  puntos de observación, que distan  $d_{ik}$  al punto  $i$  de la grilla, se calcula el valor de la diferencia correspondiente al nodo  $i$ -ésimo como una media ponderada. En esta variante, la expresión utilizada es:

$$D_i = \frac{\sum_{k=1}^n W_k^2 D_k}{\sum_{k=1}^n W_k} \quad (1.42)$$

$W_k$  está definido como

$$W_k = \frac{(RI)^2 - (d_{ik})^2}{(RI)^2 + (d_{ik})^2} \quad (1.43)$$

El autor utilizó para  $RI$  un rango que iba desde  $\bar{d}$  hasta  $4\bar{d}$ , siendo  $\bar{d}$  la distancia media entre estaciones. Como valor óptimo, adopta  $1.7\bar{d}$ . Otras variantes del criterio son las expresiones debidas a Cressman mismo

$$D_i = \frac{\sum_{k=1}^n W_k D_k}{n} \quad (1.44)$$

y la debida a Haltiner y Williams

$$D_i = \frac{\sum_{k=1}^n W_k D_k}{\sum_{k=1}^n W_k} \quad (1.45)$$

Se muestra que, en este experimento, la última y la primera expresión dieron mejor resultado que el método clásico de Cressman.

Para la interpolación óptima (que se deriva en extenso más adelante) Haagenson utiliza la expresión simplificada

$$D_i = \sum_{k=1}^n \hat{W}_k D_k \quad (1.45)$$

Los pesos  $\hat{W}_k$  se obtienen minimizando  $\overline{(\hat{D}_i - D_i)^2}$ , siendo  $\hat{D}_i$  el verdadero valor en el nodo  $i$ .

El autor, mediante algunas hipótesis adicionales, llega a que los pesos  $\hat{W}_k$  deben cumplir que

$$\sum_{k=1}^n \hat{W}_k \mu(d_{kj}) = \mu(d_{ij}); \quad j=1..n \quad (1.46)$$

siendo  $\mu_{ij}$  la correlación cruzada entre las diferencias  $D_i$  y  $D_j$ , que, por asumirse isótropa y homogénea, es únicamente función de la distancia entre  $i$  y  $j$  :  $\mu = \mu(d_{ij})$

La función  $\mu(d)$  debería poder ser aproximada a partir de la historia de observaciones. En este caso Haagenson debe imponerla, dado que no dispone de una base de datos de suficiente volumen. Utiliza dos tipos de modelo: uno, es la función de Gauss

$$\mu(d) = 1.0 \exp\left(-2.3 \frac{d^2}{RI^2}\right) \quad (1.47)$$

y la otra es la manejada por Haagenson y Shapiro, 1979

$$\mu(d) = 1.0 \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{d}{RI}\right) \exp\left(-1.5 \frac{d(\text{km})}{1000}\right) \quad (1.48)$$

Ambas funciones operaron correctamente, y dieron resultados equivalentes a los de los interpoladores de Cressman. El autor espera resultados mejores de la interpolación óptima, en el caso en que la función  $\mu(d)$  sea inferida de las propias medidas.

Johnson (1982) también compara varios métodos de interpolación. El suyo es un trabajo específicamente probado para interpolar el viento. Destaca que tradicionalmente se han utilizado funciones más o menos arbitrarias, seleccionadas con criterios de "elegancia", "eficiencia computacional" u otros argumentos, ninguno de los cuales tiene en cuenta las particularidades del sitio concreto en el que se interpolará.

Por ello recomienda para el caso en que existen, incorporar intensivamente los registros de largo período que estén disponibles en el proceso de interpolación. A las expresiones que resulten de esta tarea las denomina *funciones climatológicas de interpolación*.

Dado que se recogerá en lo que sigue la sugerencia del autor, no se ampliarán aquí detalles técnicos. Sí cabe agregar que en el trabajo se compara el desempeño de varias formas, resultando las más adecuadas y precisas las que se derivan del trabajo de Gandin de interpolación óptima.

Kahl et al., 1986 describe los resultados de utilizar diferentes técnicas de interpolación espacial y temporal del viento.

Para la interpolación espacial compara:

a) Ponderar los datos con pesos

$$\omega_k(r) = 1 / r^2$$

b) Ponderar los datos con pesos

$\omega_k(r) = \left(1 / r^2\right) (1 - 0.5 |\text{sen}(\theta_k)|)$ , siendo  $\theta_k$  el ángulo formado por la dirección de viento estimada y el radio que une al punto con la estación k-ésima.

c) Adoptar como válido el registro de la estación más próxima.

En lo que sigue, se indica con  $X_t$  las componentes del viento en el instante t.

Para la interpolación temporal utiliza:

d)  $X_t = \frac{1}{2} (X_{t-\Delta t} + X_{t+\Delta t})$  con  $\Delta t = 6 \text{ h}$

e) El método de la "aceleración variable"

$$X_t = \frac{1}{2} (X_{t-\Delta t} + X_{t+\Delta t}) + \frac{1}{4} \Delta t \left( \left. \frac{dX}{dt} \right|_{t-\Delta t} - \left. \frac{dX}{dt} \right|_{t+\Delta t} \right)$$

Las derivadas se evalúan usando diferencias centradas

$$\left. \frac{dX}{dt} \right|_t = \frac{X_{t+\Delta t} - X_{t-\Delta t}}{2 \Delta t}$$

f) Interpolación con splines cúbicos

Los errores para (a), (b) y (c) se estimaron a partir de la media de las desviaciones absolutas, definida como

$$\frac{1}{N} \sum_1^N |X_{\text{obs}} - X_{\text{Interpolado}}| \quad (1.49)$$

En general, observó que (c) es peor que (a) y (b), y que la complicación geométrica introducida en (b) no redundaba en una mejora significativa.

También se encontró que los errores son mayores para vientos fuertes (errores absolutos, no relativos).

Para la interpolación temporal de las componentes u y v, se encuentra que el mejor es (d). Dado que (e) y (f) dan similares resultados, los autores dicen que debido al alto valor de  $\Delta t$  (6 h) hay muchos fenómenos atmosféricos que no pueden ser incorporados, puesto que tienen escalas de tiempo asociadas menores a 12 h.

Como un estudio específico sobre el tema de la interpolación con pesos  $1/r^2$  y sus errores, se cita otro trabajo de Kahl (Kahl et al., 1988)

Para este trabajo (y en el citado de 1986, del mismo autor) se dispuso de dos bases de datos con registros simultáneos: una "gruesa" formada por la red regular de estaciones meteorológicas y otra "fina" provistas durante el experimento CAPTEX. Las interpolaciones de los datos de las primeras, sobre los puntos de medida de las segundas, son comparadas.

Se encuentra que el error de la interpolación citada crece con el esfuerzo cortante vertical, estimado con la expresión

$$s = \frac{\partial |V|}{\partial z} \sim \frac{\left[ \left( \sum_{i=1}^{n-1} \Delta u_i \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^{n-1} \Delta v_i \right)^2 \right]^{1/2}}{H - h} \quad (1.50)$$

siendo

$$\Delta u_i = |u_{i+1} - u_i| ; \Delta v_i = |v_{i+1} - v_i|$$

$u_i, v_i$  registros del viento en el nivel i.  
 $H - h$  el espesor de la capa de mezcla.

En el trabajo se utilizaron splines para la interpolación en la vertical de las lecturas disponibles. Los distintos niveles estaban separados por aproximadamente 100 m, y la altura máxima registrada correspondía al nivel de los 500 mb.

El error en la interpolación es mayor en la noche, lo que es atribuido a un mayor esfuerzo cortante en ese período.

Ratto et al., 1990 presenta un trabajo en el que propone una sofisticada formulación para este tópico.

Modifica el NOABL para tener más adecuadamente en cuenta la rugosidad y la variación de dirección en altura.

En la especificación del campo inicial, asume dos cosas:

a) El mejor perfil sobre un nodo del terreno es aquel que corresponde a la misma clase de estabilidad y al mismo viento geostrofico, en un terreno horizontal, homogéneo, con la misma rugosidad.

b) El viento (módulo y dirección) son únicos por encima de la capa límite.

El parámetro que describe la estabilidad es la longitud de Monin-Obukov, que se calcula con una expresión del tipo

$$\frac{1}{L} = a z_0^b \quad (1.51)$$

con parámetros a y b dependientes de la clase de estabilidad de Pasquill. L es pues, una función local de punto.

La velocidad de fricción en cada nodo tiene una expresión general

$$\frac{u_*}{G} = \frac{k}{\left[ \left( \log \frac{h}{z_0} - A_\mu \right)^2 + B_\mu^2 \right]^{1/2}} \quad (1.52)$$

siendo:

Para el caso neutro ( $\mu = 0$ )

$$A_\mu = 0.5 \quad \text{y} \quad B_\mu = 4.5$$

Para el caso estable ( $\mu > 0$ )

$$A_\mu = 0.5 + 2.55 \sqrt{\mu} \quad ; \quad B_\mu = 4.5 + 1.7647 \sqrt{\mu}$$

Para el caso inestable ( $\mu < 0$ )

$$A_\mu = 10.0 - \frac{9.5}{1 + 0.027 \sqrt{-\mu}} \quad ; \quad B_\mu = \frac{4.5}{1 + 1.581 \sqrt{-\mu}}$$

definiendo al parámetro de estratificación adimensionado  $\mu$  como

$$\mu = \frac{k u_*}{f L} \quad (1.53)$$

donde  $f$  es el parámetro de Coriolis, y  $k$  la constante de Von Kármán, igual a 0.4,  $G$  algo que no averigué aún y  $u_*$  la velocidad de fricción.

A su vez, Ratto estima la altura de la capa límite  $H$  utilizando

Para el caso neutro ( $\mu = 0$ )

$$H = 0.3 \frac{u_*}{f}$$

Para el caso estable ( $\mu > 0$ )

$$H = 0.3 \frac{u_*}{f} \left( 1 + 0.882 \sqrt{\mu} \right)^{-1}$$

Para el caso inestable ( $\mu < 0$ )

$$H = 0.3 \frac{u_*}{f} \left( 1 + 1.581 \sqrt{-\mu} \right)$$

La altura de la capa de superficie  $h_s$  la estima como 1/10 de  $H$ . La variación de la dirección del viento con la altura la estima como

$$\tan(\varphi) = \frac{B_\mu}{\log \frac{h}{z_0} - A_\mu}$$

La formulación presentada es implícita, y se requieren algunas iteraciones para determinar el parámetro  $\mu$ .

Para expresar la variación de las componentes de la velocidad con la altura, el autor utiliza perfiles logarítmicos en la capa de superficie, definida entre  $z_0 \leq z \leq h_s$ , valor que depende de la estabilidad  $\mu$ . En esta zona, no varía la dirección del viento con  $z$ .

En la capa de Eckmann, el autor interpola con polinomios de 3<sup>er</sup> grado la componente meridional y zonal del viento.

Como alternativa para todo el dominio, maneja una interpolación polinómica de 2<sup>do</sup> orden, con coeficientes dependientes de la estabilidad  $\mu$ .

El esquema presentado recoge una variedad de experiencias en el tratamiento de la capa límite. Sin embargo las mismas fueron validadas para terreno plano, y la primera hipótesis de Ratto puede ser muy fuerte. Por otra parte, los datos para la determinación de la clase de estabilidad no están disponibles en el caso del Uruguay.

Hino (Hino et al., 1991) usa para la ponderación de datos

dispersos, un esquema diferente de que los que se han visto habitualmente. El mismo se basa en una analogía de tipo elástico, en la que aparecen las funciones de Green. De esa forma, el campo a interpolar tiene la forma de:

$$u_0(x_i, y_i) = \sum_{j=1}^N \mathcal{G}(x_i, y_i, \zeta_j, \xi_j) \cdot P(\zeta_j, \xi_j) \quad (1.54)$$

$\mathcal{G}(x_i, y_i, \zeta_j, \xi_j)$  es la deflexión en  $(x_i, y_i)$  debida a una carga unitaria aplicada en  $(\zeta_j, \xi_j)$ , en una placa plana y es conocida como la función de Green.

$P(\zeta_j, \xi_j)$  es la "carga" virtual aplicada en el punto  $(\zeta_j, \xi_j)$ .  
 $N$  son los puntos donde hay medidas, o donde son impuestos valores arbitrarios al campo  $u_0$   
 (Hino, 1992).

Para el caso de una placa rectangular de lados  $a$  y  $b$ , la función de Green tiene la forma (Timoshenko et al., 1975)

$$\mathcal{G}(x, y, \zeta, \xi) = \frac{4}{\pi^4 abD} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}\left(\frac{m\pi\zeta}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{b}\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}{\left[\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right]^2} \quad (1.55)$$

siendo  $a$  y  $b$  las dimensiones de la placa simplemente apoyada, y  $D$  una propiedad del material. La serie converge muy rápidamente.

Según Hino, 1992, las condiciones de borde pueden ajustarse mediante apropiada elección de las cargas virtuales.

A partir de los datos interpolados, el autor aplica el algoritmo de Sherman y Sasaki, para calcular el campo instantáneo de velocidades dentro de una turbomáquina, obteniendo así un campo que verifica la conservación de la masa. Presenta un par de resultados, tomados de ejemplos analíticos.

La mejor o peor fórmula o algoritmo de interpolación no debe perder de vista las naturales variabilidades de las magnitudes sobre las que se trabaja. El trabajo de Leahey, (Leahey et al., 1989) es en ese sentido muy ilustrativo. El autor analiza lecturas de dos estaciones separadas 7.5 Km y encuentra que, típicamente, sus registros difieren en 10-25 grados y 1.0 m/s.

Citando a Hanna, 1982, predice que tales diferencias evolucionan como

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta}(d) &= 15^{\circ} + 5.7 \log(d) \\ \sigma_v(d) &= 0.47 \text{m/s} + 0.24 \log(d) \end{aligned} \quad (1.56)$$

Siendo  $d$  medido en Km,  $\sigma_{\ominus}$  en grados y  $\sigma_v$  en m/s. Hanna a su vez se basa en un trabajo de Lockhart e Irwin, en el que  $d$  alcanzaba los 80 Km.

Asimismo, en lo que respecta a la evolución de  $\sigma_{\ominus}$  y  $\sigma_v$  con respecto al módulo de la velocidad del viento  $V$ , se cita y compara una formulación empírica debida a Nappo, en la que

$$\sigma_{\ominus}^2(v) = 25 + \left(\frac{60}{V}\right)^2 \quad \text{y} \quad \sigma_v^2(v) = (0.15v)^2 \left(1 + \left(\frac{4}{V}\right)^2\right) \quad (1.57)$$

De sus propias medidas, el autor confirma que la primera de las formulaciones funciona razonablemente bien para velocidades superiores a 5 m/s. Logra identificar la causa de las irregularidades asociadas a valores demasiado diferentes, medidos en condiciones de atmósfera estable, y que tenían un marcado ciclo diurno.

La segunda expresión está en buen acuerdo con sus medidas.

### 1.2.3 Análisis de componentes principales

Hasta aquí se ha presentado con detalle el estado del arte en el tema del cálculo del campo de velocidad de viento, dados los registros simultáneos en un conjunto de sitios. Ello en principio requeriría para la obtención de las series, la integración reiterada de las ecuaciones para cada evento registrado (horario en el caso de Uruguay). Como se verá, ello no es necesario.

Como parte de las tareas involucradas en el desarrollo del modelo COMPLEX, Ludwig (Ludwig et al., 1980) puso en evidencia una propiedad interesante de esta familia de modelos: su condición de lineal con respecto a los datos de entrada.

Tanto Liu, 1976, como Sherman, 1978 como Traci, 1978, etc. o bien habían ignorado esta característica, o bien no la habían utilizado en la operatoria.

Siguiendo en ello la presentación de Ludwig, existe siempre la posibilidad de descomponer el campo de velocidades de entrada, en una combinación lineal de casos.

En los modelos de ecuaciones primitivas, no lineales, ello, si bien puede arrojar luz respecto a la naturaleza del problema y a permitir esbozar alguna hipótesis simplificadora, no representa avance alguno a la hora de calcular un año completo de la serie horaria de viento. Es necesario realizar 8760 cálculos, más o menos costosos, debido a la naturaleza no lineal de las ecuaciones tratadas.

Tanto en la formulación del problema de Sherman, minimizando la perturbación respecto al campo interpolado, como la de Traci,

en la que se conserva la componente vertical del rotacional, es posible demostrar que ante cualquier combinación instantánea de datos de entrada, es posible calcular el campo solución como combinación lineal de resultados previamente obtenidos.

De las infinitas maneras de descomponer los datos de entrada, en este trabajo se ha optado por realizar un análisis de componentes principales, siguiendo a Endlich et al., 1982.

Ello es una técnica de amplia difusión, como se verá, y de una gran utilidad para obtener una mayor comprensión física de los datos. Ha sido aplicada con sonado éxito en el estudio de poblaciones de datos del más diverso tipo, tanto escalar como vectorial. En 2.3 se presentará un desarrollo del método, restringiéndose ahora a la presentación de los antecedentes consultados.

Para el caso de variables vectoriales, como el viento, existe la posibilidad de tratarlas como dos variables escalares independientes, o como vectores.

Así, Hardy (Hardy et al., 1978) analiza el algoritmo para el caso de campos vectoriales. A modo de ejemplo, lo aplica a la zona de la bahía de San Francisco, utilizando datos horarios de 10 estaciones, para un año.

En ese trabajo, los registros individuales se consideran como números complejos. Si se les agrupa en una matriz  $S_{n \times m}$  con  $n$  estaciones y  $m$  eventos, se puede formar la matriz  $H_{n \times n} = \frac{S \cdot S^H}{m}$ , definiendo con el superíndice  $H$  a la matriz traspuesta y conjugada de  $S$ .

Es posible demostrar que  $H$  es Hermitiana, por lo que tiene  $n$  valores propios reales, y  $n$  vectores propios asociados ortogonales.

Los vectores propios cumplen (una vez normalizados):

$$H \cdot E_j = \lambda_j E_j \quad j = 1..n; \quad E_j^H \cdot E_i = \delta_{ij} \quad i, j = 1..n \quad (1.58)$$

Si se "rota" un vector propio, sigue siéndolo y también se mantiene ortogonal a los otros. Por "rotar" un vector propio, se entiende encontrar otro vector  $B_k$  tal que

$$B_k = E_k \cdot \exp(i\beta_k), \quad \beta_k \text{ arbitrario, } k=1..n \quad (1.59)$$

Los datos instantáneos se pueden expresar como una combinación lineal de los vectores propios

$$S_i = \sum_{k=1}^N c_{ki} \cdot E_k; \quad i=1..m \quad (1.60)$$

$c_{ki}$  es en general, complejo. Si se le expresa como  $c_{ki} = a_{ki} \cdot \exp(i\theta_{ki})$  se ve que el vector  $E_k$  es escalado por un único factor  $a_{ki}$ , y luego girado un único ángulo de fase  $\theta_{ki}$ .  $a_{ki}$  es ahora mayor o igual a cero, y es independiente del ángulo  $\beta_k$ .

Del análisis de la serie temporal de los coeficientes  $a_{ki}$ , Hardy encuentra una importante correlación con los períodos secos y húmedos. El autor hizo un cálculo por separado, para cada uno de los meses de la base de datos.

En lo que respecta al ángulo  $\beta_k$ , Hardy lo intenta fijar arbitrariamente, de forma que el valor más probable del argumento  $\theta_{ki}$  sea nulo en el período. La distribución en el conjunto de datos del ángulo  $\theta_{ki}$  es tal que típicamente tiene un único máximo. Seleccionando  $\beta_k$  igual y opuesto al ángulo correspondiente, se obtiene lo buscado.

Sin embargo, existen períodos para los cuales la distribución de ángulos tiene dos máximos, que no están en oposición de fase. Ello ocurre, para el caso estudiado, en los meses húmedos. En ese caso, no hay manera "natural" de seleccionar  $\beta_k$ , y ello redundará en cierta ambigüedad del método.

A modo de comparación, y trabajando sobre datos de los Estados Unidos tomados en conjunto, Klink (Klink et al., 1988) realiza simultáneamente tres tipos de análisis de componentes principales para viento: uno basado en una formulación vectorial, en la que la velocidad se maneja como un número complejo, con módulo y dirección, otro en la versión u-v (en la que la velocidad instantánea se analiza como dos escalares, que son los valores meridionales y zonales, y un tercero en que estudia sólo la dirección.

En el caso de la formulación vectorial, la autora sigue muy de cerca a Hardy et al., 1978. Se define la matriz de covarianza compleja  $C$ , como aquella cuyo término general es

$$c_{ij} = \overline{\left[ V_i(\tau) - \bar{V}_i \right]^*} \left[ V_j(\tau) - \bar{V}_j \right] \quad (1.61)$$

indicando el \* el conjugado, y la barra el promedio temporal.

Los vectores propios de la matriz Hermitiana  $C$  tienen valores propios asociados reales y positivos. Los vectores propios quedan, al igual que lo reconoce Hardy, definidos a menos de un ángulo arbitrario. Klink propone "girar" el j-ésimo vector calculado un ángulo  $\Delta_j$  que resulta de la siguiente operación:

$$\Delta_j = \bar{\alpha}(\hat{V}_j) - \bar{\alpha}(S_j) \quad \text{definiendo} \quad \hat{V}_j = V - \sum_{i=1}^{j-1} (S_i \Delta_i) (E_i \Delta_i)^+ \quad (1.62)$$

donde  $\bar{\alpha}(\hat{V}_j)$  es la media de los  $m \times n$  ángulos de las componentes de la matriz  $\hat{V}_j$ ,  $\bar{\alpha}(S_j)$  es la media de los  $n$  coeficientes que ponderan la contribución del vector propio  $j$ ,  $S_i \Delta_i$  es el vector  $n \times 1$  que representa la contribución del vector  $i$ -ésimo corregida por el ángulo correspondiente,  $(E_i \Delta_i)^+$  es el vector  $1 \times m$  correspondiente al vector  $i$  corregido con el ángulo  $\Delta_i$ .

Más allá de toda la complejidad de esta notación tan compacta, la matriz  $V_j$  de dimensión  $n \times m$  es aquella que contiene la anomalía, menos la parte explicada por los primeros  $j-1$  vectores reorientados.

Los valores propios, a partir del tercero, explican aproximadamente lo mismo para los tres análisis. El caso de la dirección tiene más ruido, y ello se refleja en que los primeros tres términos explican un 34% de la varianza, cuando los otros métodos explican más del 43%, en el caso analizado.

En lo que tiene que ver con los resultados comparativos, Klink no halla grandes diferencias entre el análisis del viento considerado como magnitud vectorial y como combinación de escalares, salvo en lo atinente a la fase. El caso de la dirección es, como se preveía, algo distinto.

En nuestro caso, se trató a los datos vectoriales disponibles, como parejas de variables escalares.

## 2. DESCRIPCION DEL MODELO A IMPLEMENTAR

De entre las muchas variantes existentes se debe adoptar, para el análisis del caso uruguayo, aquella que tenga en cuenta los datos disponibles, que por cierto, no son demasiados.

Dado que no existen, por ejemplo, registros de viento en altura, deben ser evitadas aquellas formulaciones que los requieran. Por ello, por ejemplo, el viento geostrófico sólo podría en principio ser estimado a partir de datos de presión.

El modelo matemático de interpolación tomará como volumen de trabajo un recinto comprendido entre el suelo y una altura suavemente variada sobre el terreno, que determinarán cada una superficies impermeables al flujo; y bordes laterales, que serán permeables al paso del aire. Este volumen podrá tener una base de aproximadamente 200x200 Km, limitado por la capacidad del computador utilizado, y una altura del orden de los 500 a 1500 m. El modelo interpolará los datos meteorológicos a una grilla interior, de base rectangular, de lados no menores a 2 o 3 Km. Esta restricción es una cota determinada por razones de validez física de los resultados.

El producto del modelo es una vinculación de tipo determinista entre las velocidades leídas en las estaciones sinópticas y la velocidad calculada en cada uno de los puntos de esa grilla.

Esto permite, mediante la existencia de las series históricas de viento, inferir series temporales para los puntos interiores.

### 2.1. Bases matemáticas del modelo seleccionado

Esencialmente se ha seguido la metodología propuesta por Sherman, (Sherman, 1978), que propone ajustar el campo de velocidades de viento utilizando como ecuación de trabajo la de continuidad. La misma tiene la siguiente expresión general (asumiendo condiciones estacionarias y fluido incompresible)

$$\nabla(\bar{V})=0 \quad (2.1)$$

Si se denominan  $u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z)$  a las componentes de velocidad de Este a Oeste, de Sur a Norte y hacia arriba, del vector  $\bar{V}$ , resulta:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.2)$$

Se puede descomponer

$$\bar{V} = \bar{V}_0 + v' \quad (2.3)$$

siendo  $\bar{V}_0$  un campo de velocidades inicial. La forma particular del mismo se discutirá en 2.2.

La elección de la forma funcional de  $\bar{V}_0(x,y,z)$  es arbitraria, y este campo no cumple necesariamente la ecuación de continuidad, como se verá. Tampoco tiene carácter de "semilla" a utilizar en el cálculo: se postula que es él mismo, una buena aproximación del campo de velocidades buscado.

Por lo tanto, el campo de velocidades ajustado será tal que se aproxime con mínima discrepancia al campo interpolado, manteniendo la condición de divergencia nula.

Matemáticamente se plantea la primera condición haciendo mínima una norma de  $v'$  en el dominio de integración:

$$\int_{\Omega} \left[ \alpha_1^2 (u')^2 + \alpha_1^2 (v')^2 + \alpha_2^2 (w')^2 \right] dx dy dz \quad \text{mínima} \quad (2.4)$$

o, lo que es lo mismo, minimizar el funcional en  $u, v, w$

$$E(u, v, w) = \int_{\Omega} \left[ \alpha_1^2 (u-u_0)^2 + \alpha_1^2 (v-v_0)^2 + \alpha_2^2 (w-w_0)^2 \right] dx dy dz \quad (2.5)$$

Donde:

$\Omega$  es el dominio de integración, definido como se indicó previamente.

$\alpha_1, \alpha_2$  coeficientes de ponderación, utilizados para favorecer relativamente la variación de las componentes verticales de la velocidad frente a las horizontales. Ambos coeficientes se asumen constantes dentro del dominio.

$u, v, w$  componentes del vector  $\bar{v}$

$u_0, v_0, w_0$  componentes del vector  $\bar{v}_0$

Para incluir la condición de la divergencia nula, se aplica (siguiendo a Sasaki, 1970) el método de los multiplicadores de Lagrange. Para ello, se modifica la forma de  $E(u, v, w)$ , introduciendo la variable  $\lambda$ , a saber:

$$E(u, v, w, \lambda) = \int_{\Omega} \left[ \alpha_1^2 (u-u_0)^2 + \alpha_1^2 (v-v_0)^2 + \alpha_2^2 (w-w_0)^2 + \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] dx dy dz \quad (2.6)$$

Esta expresión, para los  $u, v, w, \lambda$  buscados, debe ser mínima. Si se plantea una función perturbada por ejemplo, para la variable  $u$ , resultará  $E(u, v, w, \lambda) \leq E(f, v, w, \lambda)$  para toda función  $f \neq u$ .

Si se elige para la función  $f$  la siguiente forma:  $f = u + \epsilon \cdot \varphi$ , siendo  $\epsilon$  una variable independiente, y  $\varphi$  un campo escalar, función

de  $x, y, z$  que vale cero en todo punto de la frontera de  $\Omega$ , al sustituir en la definición de  $E$ , resulta:

$$E(u+\varepsilon.\varphi, v, w, \lambda) = \int_{\Omega} \left[ \alpha_1^2 (u-u_0+\varepsilon.\varphi)^2 + \alpha_1^2 (v-v_0)^2 + \alpha_2^2 (w-w_0)^2 + \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] dv \quad (2.7)$$

Esta función debe, por la definición de  $u$ , tener un mínimo absoluto para  $\varepsilon = 0$ . Por ser continua y derivable en  $\varepsilon$ , debe ser  $\frac{dE}{d\varepsilon} = 0$ , lo que implica que

$$\frac{dE(u+\varepsilon.\varphi, v, w, \lambda)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = \int_{\Omega} \left[ 2.\alpha_1^2 (u-u_0+\varepsilon\varphi) \varphi + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] dv \Big|_{\varepsilon=0} = 0 \quad (2.8)$$

Teniendo en cuenta que  $\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\lambda \varphi) - \varphi \frac{\partial \lambda}{\partial x}$ , se deduce que

$$\begin{aligned} \frac{dE(u+\varepsilon.\varphi, v, w, \lambda)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} &= \int_{\Omega} \left[ 2.\alpha_1^2 (u-u_0+\varepsilon\varphi) \varphi + \frac{\partial}{\partial x} (\lambda \varphi) - \varphi \frac{\partial \lambda}{\partial x} \right] dv \Big|_{\varepsilon=0} = \\ &= \int_{\Omega} \left[ 2.\alpha_1^2 (u-u_0) - \frac{\partial \lambda}{\partial x} \right] \varphi dv + \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} (\lambda \varphi) dv \end{aligned} \quad (2.9)$$

El segundo término se puede expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} (\lambda \varphi) dv &= \int_{\varphi_6}^{\varphi_5} \int_{\varphi_3}^{\varphi_4} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\partial}{\partial x} (\lambda \varphi) dx dy dz = \\ &= \int_{\varphi_6}^{\varphi_5} \int_{\varphi_3}^{\varphi_4} \left[ (\lambda \varphi) \Big|_{\varphi_2} - (\lambda \varphi) \Big|_{\varphi_1} \right] dy dz \end{aligned} \quad (2.10)$$

integral que es nula, ya que sobre la superficie  $\varphi_1 \cup \varphi_2 \cup \varphi_3 \cup \varphi_4$ ,  $\varphi$  vale cero.

Como la función  $\varphi$  es, en lo demás, arbitraria, resulta que

$$\int_{\Omega} \left[ 2.\alpha_1^2 (u-u_0) - \frac{\partial \lambda}{\partial x} \right] \varphi dv \quad (2.11)$$

debe ser igual a cero, para todo  $\varphi$ . Se deduce sin dificultad que

$$u = u_0 + \frac{1}{2\alpha_1^2} \frac{\partial \lambda}{\partial x} \quad (2.12)$$

Análogamente se puede demostrar para las demás componentes que

$$v = v_0 + \frac{1}{2\alpha_1^2} \frac{\partial \lambda}{\partial y} ; \quad w = w_0 + \frac{1}{2\alpha_2^2} \frac{\partial \lambda}{\partial z} \quad (2.13)$$

Tomando derivadas parciales y sumando en las tres ecuaciones precedentes, se obtiene, teniendo en cuenta la ec. (2.2)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2\alpha_1^2} \frac{\partial \lambda}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{2\alpha_1^2} \frac{\partial \lambda}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{2\alpha_2^2} \frac{\partial \lambda}{\partial z} \right) = - \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z} \right) \quad (2.14)$$

que tiene la forma de la ecuación de Poisson.

La solución de la misma es un problema clásico en ingeniería y física. Se ha utilizado en este caso para la resolución, un programa de transmisión del calor en sólidos, que responde a la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = - Q(x, y, z) \quad (2.15)$$

siendo:

T Temperatura

$k_x, k_y, k_z$  conductividades en las direcciones x, y, z

Q(x, y, z) generación interna de calor

El algoritmo de este programa se basa en el Método de los Elementos Finitos, lo que permite un fácil tratamiento de las condiciones de borde y de la topografía compleja. Las citadas condiciones de borde son tales que (siguiendo a Sherman, 1978, ya citada), en las fronteras laterales (abiertas) se impone  $\lambda = 0$ , con lo que queda libre la derivada; en el piso y techo, supuestos impermeables, se impone  $\frac{\partial \lambda}{\partial n} = 0$ , lo que es equivalente a asumirlos adiabáticos.

Siguiendo la sugerencia de Guo (Guo et al., 1990) se hace una corrección a posteriori del campo obtenido.

Dado que en este algoritmo no se mantienen estrictamente los valores registrados en las estaciones, y ello en algún caso provoca predicciones relativamente pobres, se ha sugerido afectar al campo solución (u, v, w) por un coeficiente c que minimice

$$\sum_{i=1}^n \left( c \cdot u_i - u_0 \right)^2 + \left( c \cdot v_i - v_0 \right)^2 + \left( c \cdot w_i - w_0 \right)^2 \quad (2.16)$$

tomando la sumatoria únicamente en los puntos con datos. Con ello

se logra que las predicciones  $(u_1, v_1, w_1)$  para los puntos dato sean lo más próximo posible a los propios registros. El óptimo resulta para

$$c = \frac{\sum_{i=1}^n (u_1 u_{0i} + v_1 v_{0i} + w_1 w_{0i})}{\sum_{i=1}^n (u_1^2 + v_1^2 + w_1^2)} \quad (2.17)$$

El campo obtenido es aún solenoidal y cumple las condiciones de borde.

Asimismo fue implementada una versión cuya ecuación de trabajo es formalmente similar, pero tiene un dominio con geometría muy simple, siguiendo la línea de Bhumralkar et al., 1980 y Endlich et al., 1982. En el Anexo 1 se presenta la derivación de las ecuaciones de trabajo que resultan en el nuevo sistema coordenado.

A diferencia de Bhumralkar y Endlich, que obtienen ecuaciones para las componentes  $\pi u, \pi v, \pi w$  directamente, en esta implementación se ha expresado el problema en términos del multiplicador de Lagrange  $\lambda$ . Esto reduce en 1/3 el esfuerzo de cálculo requerido, pero obliga a hallar las derivadas parciales del campo  $\lambda$ , con lo que el bien conocido problema de la difusión numérica hace aparición (ver p. ej. Hirsch, 1988 pp. 237-240)

Otro aspecto a revisar de esta formulación específica, es la validez de la propia ecuación de trabajo.

Citando a Bhumralkar et al., 1978 "...Una simplificación de estas ecuaciones en el sistema  $(x, y, \sigma)$  las hacen análogas a las de Sherman (1978) para el sistema  $(x, y, z)$ . Esta simplificación implica desprestigiar algunos términos que pueden ser de importancia en áreas de terreno muy complejo, pero son de menor importancia en otras partes..."

La validez de tal simplificación debe ser revisada en cada caso específico.

## 2.2. Especificación del campo inicial

Este campo es usualmente determinado a partir de los datos de viento a 10 m de altura (viento de superficie) y el dato de viento de altura (viento geostrofico) si estuviesen disponibles. Los primeros son regularmente observados por la red de la DNM y el Servicio Oceanográfico, Hidrográfico y Meteorológico de la Armada (SOHMA). El segundo no es objeto de medida directa en el Uruguay, y por lo tanto, sólo estimaciones pueden ser utilizadas.

No existen tampoco mástiles meteorológicos ni sondeos

regulares, por lo que se carece asimismo de registros de viento y temperatura en la vertical.

Ello necesariamente condiciona el tipo de metodología y modelo a aplicar, que debe tener en cuenta esa realidad.

Asimismo, los bancos de datos disponibles no están suficientemente depurados y analizados, y su uso indiscriminado puede llevar a resultados imposibles de comprender.

En las secciones 2.2.1 y 2.2.2 se analizan las alternativas utilizadas para la estimación del viento de superficie. En 2.2.3 se presentan las opciones implementadas para la extrapolación en altura.

Las tres secciones detallan los procedimientos seguidos para la estimación de las componentes paralelas al terreno (mal llamadas horizontales).

Por su parte, la componente normal al terreno es raramente medida en forma directa. Por esa razón, y dado que es por lo menos dos órdenes de magnitud menor que las componentes horizontales, algunos autores (Sherman, 1978, etc.) directamente inicializan con cero la velocidad vertical.

Ello obliga a un especial tratamiento de la condición de borde en el piso y techo, puesto que si la componente vertical es nula, y el terreno no es horizontal, habría penetración en la frontera rígida.

Es por ello que se ha optado por inicializar  $w_0$  con un valor dependiente de la velocidad horizontal, de forma que

$$(u_0, v_0, w_0) \cdot \vec{n} = 0, \text{ lo que implica que}$$
$$w_0 = u_0 \left[ \frac{\partial h}{\partial x} + \sigma \frac{\partial}{\partial x} (H-h) \right] + v_0 \left[ \frac{\partial h}{\partial y} + \sigma \frac{\partial}{\partial y} (H-h) \right] \quad (2.18)$$

Con ello se provoca que las superficies iso-sigma sean superficies de corriente del campo inicial (Endlich et al., 1983; Guo et al., 1990). Ello es equivalente a imponer  $\vec{w}_0 = 0$  en el caso de la formulación en coordenadas conformes (Traci et al., 1978; Bhumralkar et al., 1980, Endlich et al., 1982, etc.)

### 2.2.1 Interpolación con funciones de punto

En lo que respecta a la determinación del campo de velocidades a 10 m de altura, la mayor parte de la literatura consultada utiliza funciones que ponderan los registros "instantáneos" de viento, con pesos inversamente proporcionales a la distancia. En esta línea, se citan los trabajos de Traci et al., 1978, Sherman, 1978, Bhumralkar et al., 1980, Endlich et al.,

1982, Moussiopoulos et al., 1988, etc.

La expresión manejada usualmente es

$$\bar{v}_0(x,y,z) = \frac{\sum_{j=1}^n \frac{\bar{v}_j}{r_j^2}}{\sum_{j=1}^n \frac{1}{r_j^2}} \quad (2.19)$$

siendo

$\bar{v}_j$  la velocidad en la estación j-ésima, extrapolada a la altura z.

$r_j$  la distancia entre la estación j-ésima, y el punto de coordenadas (x,y)

Esta formulación reproduce exactamente los valores registrados en el caso en que  $r_j = 0$ .

Ya se ha mencionado que existen otras variantes más o menos complejas, que utilizan funciones dependientes de la distancia. Por ejemplo, el método de Cressman y sus variantes (Haagenson et al., 1987), pesos exponenciales (Dickerson, 1978),  $1/r^2$  con radio de influencia (Liu et al., 1976), uso de funciones de Green (Hino et al., 1991), etc.

Todas estas formulaciones tienen como ventaja el no requerir banco de datos alguno para la interpolación, así como tampoco exigen de una gran inversión en tiempo de cálculo.

En el presente modelo se implementó una opción de interpolación  $1/r^2$  sin radio de influencia, siguiendo la línea de Sherman, Traci, Endlich y Bhumralkar.

### 2.2.2. Interpolación con funciones climatológicas.

Si se considera que el modelo tiene como hipótesis de trabajo que el campo interpolado debe ser por sí una muy buena aproximación, todo esfuerzo tendiente a mejorar ese punto de partida está justificado.

En el punto anterior se ha presentado la metodología utilizada corrientemente en la bibliografía consultada. Ella tiene como ventaja la simplicidad, dado que solamente se requiere conocer ubicación geográfica de las estaciones dato respecto al punto en el que se quiere interpolar. Implícitamente se están asumiendo ciertas condiciones de correlación espacial del campo, y se deja de lado toda otra información disponible.

Se entiende por funciones climatológicas de interpolación a

aquellas expresiones que incorporan en sus constantes datos de las series históricas disponibles, sus correlaciones y propiedades estadísticas. Por ende, para aplicarlas, es necesario disponer de un banco de datos, el cual brindará la información requerida, y participará intensivamente en los cálculos. Tales procedimientos son de rutina en la inicialización de modelos meteorológicos planetarios. De entre los posibles, se analiza la interpolación óptima (debida a Gandin, 1965), que se presenta a continuación.

Sea  $S' = S(r) - S^*(r)$ , donde  $S(r)$  es el valor real,  $S^*(r)$  el valor estimado y  $r$  el radiovector que indica el punto en el cual se interpolará. La magnitud  $S$  es escalar.

Sea  $T$  un conjunto de observaciones de  $S$ , (que se designa por  $\hat{S}(r_i)$ ), en  $i=1..n$  sitios, durante  $1..m$  eventos.  $T$  ha sido formado considerando regímenes comparables. Por ejemplo, podría estar formado sólo por datos nocturnos.

Se destaca con la palabra *verdadera* los parámetros que se definen para los valores exactos (pero desconocidos) de la variable en estudio.

Los parámetros calculados a partir de las medidas se indican con un  $\hat{\phantom{x}}$ . La barra indica promedio en el tiempo.

La covarianza *verdadera* de la muestra se define como

$$\sigma_{ij} = \overline{S'_i \cdot S'_j} \quad ; \quad i, j = 1..n; \quad i \neq j \quad (2.20)$$

La función de estructura *verdadera* se define como

$$\beta_{ij} = \overline{(S'_i - S'_j)^2} \quad (2.21)$$

La varianza *verdadera* en un punto de los medidos es

$$\sigma_{ii} = S_i'^2 \quad (2.22)$$

y la matriz  $\Sigma = [\sigma_{ij}]$  es una matriz simétrica de orden  $n$ .

Se puede definir el coeficiente de correlación *verdadero*

$$\mu_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{(\sigma_{ii} \sigma_{jj})^{1/2}} \quad (2.23)$$

Asociado a él, se define una matriz  $M = [\mu_{ij}]$ , con elementos  $\mu_{ii} = 1$ .

Si se denota como  $\hat{S}_i$  al valor medido del viento, que es diferente del valor  $S_i$  real, se cumplirá que  $\hat{S}_i = S_i + \varepsilon_i$ , dado que difieren en una cantidad  $\varepsilon_i$  aleatoria.

Se asume por hipótesis, que los errores aleatorios  $\varepsilon_i$  no están correlacionados con los valores medidos  $\hat{S}_i$ , ni con los errores en las otras estaciones, por lo que

$$\overline{\varepsilon_i \hat{S}_i} = 0 \quad \text{y} \quad \overline{\varepsilon_i \varepsilon_j} = \delta_{ij} \cdot \sigma_{\varepsilon_i} \quad (2.24)$$

donde  $\sigma_{\varepsilon_i}$  es la desviación estándar de la medida, que depende del instrumento. Si a estos se les asumen iguales entre sí, resulta

$$\sigma_{\varepsilon_i} = \sigma_{\varepsilon} \quad i=1..n \quad (2.25)$$

De lo expuesto, se puede escribir

$$\hat{S}_i = S'_i + \varepsilon_i \quad (2.26)$$

$$\hat{\sigma}_{ii} = \overline{\hat{S}'_i{}^2} = \sigma_{ii} + \sigma_{\varepsilon}^2 \quad (\text{el medido difiere del verdadero}) \text{ y}$$

$$\hat{\sigma}_{ij} = \overline{\hat{S}'_i \hat{S}'_j} = \sigma_{ij}, \quad \text{para } i \neq j \quad (\text{el medido no difiere del verdadero})$$

El error estándar de la observación puede ser estimado extrapolando la función de estructura  $\beta$ , supuesta homogénea e isotrópica, a la distancia cero. O sea

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_{ij} &= \overline{(\hat{S}'_i - \hat{S}'_j)^2} = \overline{\hat{S}'_i{}^2} + \overline{\hat{S}'_j{}^2} - 2 \cdot \overline{\hat{S}'_i \hat{S}'_j} = \\ &= (\sigma_{ii} + \sigma_{\varepsilon}^2) + (\sigma_{jj} + \sigma_{\varepsilon}^2) - 2 \cdot \sigma_{ij} = \sigma_{ii} + \sigma_{jj} - 2 \cdot \sigma_{ij} + 2 \cdot \sigma_{\varepsilon}^2 = \\ &= \beta_{ij} + 2\sigma_{\varepsilon}^2 \end{aligned} \quad (2.27)$$

De aquí, como  $\beta_{ii} = 0$ , y si se asume  $\beta = \beta(r)$ , resulta  $2\sigma_{\varepsilon}^2 = \hat{\beta} \Big|_{r=0}$

Este procedimiento para estimar el error instrumental suele dar resultados exageradamente grandes. Johnson propone como alternativa, determinarlo como el máximo valor posible que cumple

$$\mu_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{(\hat{\sigma}_{ii} - \sigma_{\varepsilon}^2)^{1/2} (\hat{\sigma}_{jj} - \sigma_{\varepsilon}^2)^{1/2}} \leq 1, \quad \forall i \neq j \quad (2.28)$$

En el caso uruguayo, la función de estructura predice para  $2\sigma_{\varepsilon} \cong 8 \text{ Km}^2/\text{h}^2$  (ver fig. 2.1) mientras que acotando por la correlación, el mismo resulta del orden de  $1.25 \text{ Km}^2/\text{h}^2$ .

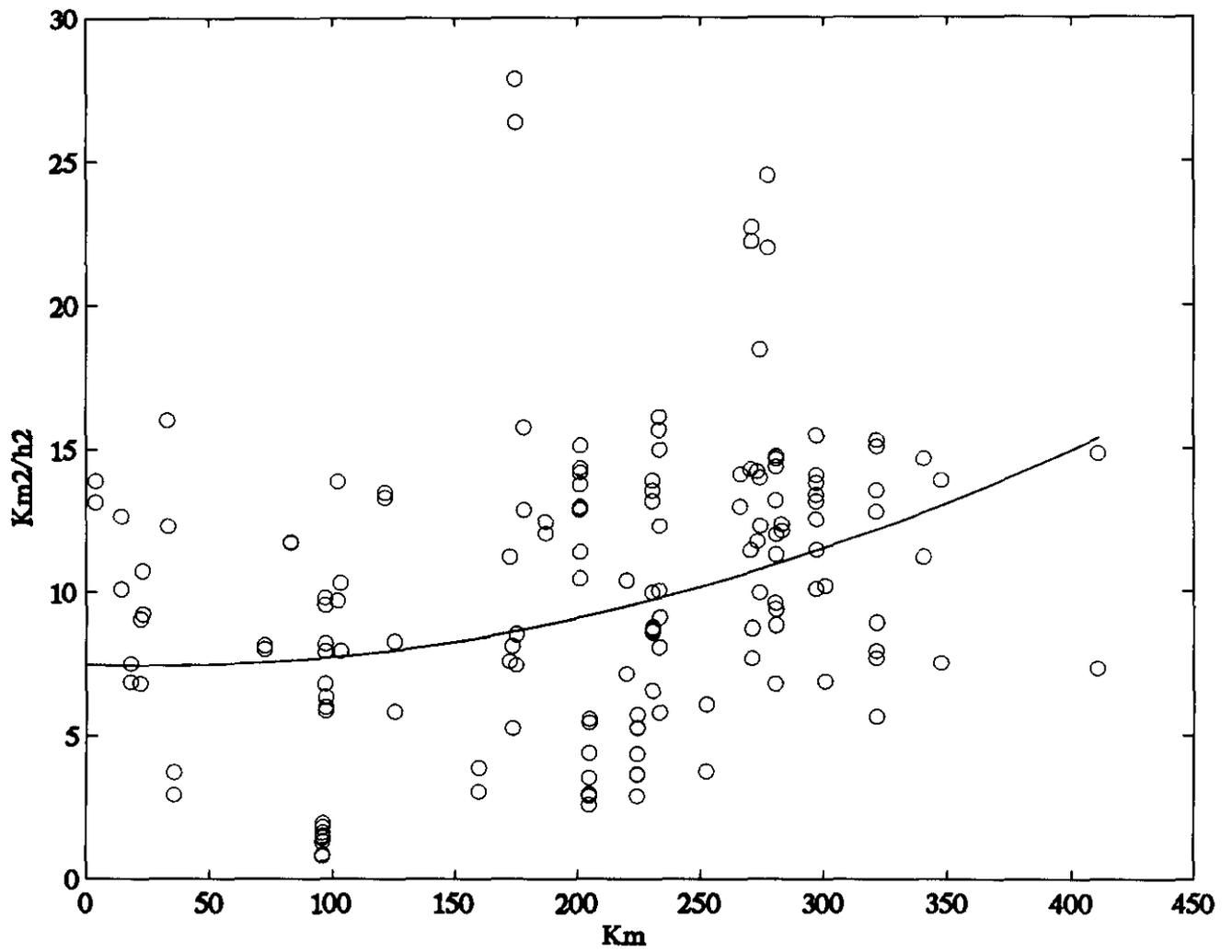


Fig. 2.1 Función de estructura  $\beta$  vs. distancia, y extrapolación polinomial

Ajustando por las dos formulaciones citadas por Haagenson, 1987, se observa que para el conjunto de datos disponibles, la expresión

$$\mu(d) = 1.0 \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{d}{RI}\right) \exp\left(-1.325 \frac{d}{RI}\right) \quad (2.29)$$

con radio de influencia  $RI=1300$  Km, ajusta mejor los datos, siendo la discrepancia promedio algo menor a 0.1 para  $\mu$ .

El ajuste con la función

$$\mu(d) = 1.0 \exp\left(-\frac{d}{RI}\right) \quad (2.30)$$

para  $RI=705$  Km, dio resultados levemente mejores, aún siendo la expresión más simple, por lo que se la utilizó en los cálculos.

El método de interpolación óptima predice no la magnitud, sino el valor de la perturbación  $S'(r_0)$ , con la siguiente expresión

$$S'(r_0) = \sum_{i=1}^N \omega_i \hat{S}'_i + I_0 \quad (2.31)$$

Los pesos  $\omega_i$  son seleccionados con objeto de minimizar la media cuadrática de los errores  $I_0$  sobre los puntos medidos.

$$E = \frac{\sum_{i=1}^N \left( \omega_i (S'_i + \varepsilon_i) - S'_0 \right)^2}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \omega_i \omega_j \sigma_{ij} + \sum_{i=1}^N \omega_i^2 \sigma_\varepsilon^2 - 2 \sum_{i=1}^N \omega_i \sigma_{i0} + \sigma_{00}} = \quad (2.32)$$

La condición de mínimo implica  $\frac{\partial E}{\partial \omega_i} = 0$ ;  $i=1..N$ , lo que conduce al siguiente sistema

$$2 \sum_{j=1}^N \omega_j \sigma_{ij} + 2\omega_i \sigma_\varepsilon^2 = 2\sigma_{i0}; \quad i = 1..N \quad (2.33)$$

Si se divide término a término por  $\sqrt{(\sigma_{00}\sigma_{11})}$  se puede transformar

$$\sum_{j=1}^N \frac{\omega_j}{\sqrt{\sigma_{00}}} \frac{\sigma_{ij} \sqrt{\sigma_{jj}}}{\sqrt{\sigma_{11} \sigma_{jj}}} + \frac{\omega_i}{\sqrt{\sigma_{00}}} \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sqrt{\sigma_{11}}} = \frac{\sigma_{i0}}{\sqrt{\sigma_{00} \sigma_{11}}}; \quad i = 1..N \quad (2.34)$$

Haciendo el cambio de variable  $\mu_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{(\sigma_{11} \sigma_{jj})^{1/2}}$ , resulta

$$\sum_{j=1}^N \mu_{ij} \omega_j \frac{\sqrt{\sigma_{jj}}}{\sqrt{\sigma_{00}}} + \omega_i \frac{\sqrt{\sigma_{ii}}}{\sqrt{\sigma_{00}}} \frac{\sigma_{\epsilon}^2}{\sigma_{ii}} = \mu_{i0} \quad (2.35)$$

Llamando  $q_j = \omega_j \frac{\sqrt{\sigma_{jj}}}{\sqrt{\sigma_{00}}}$  se llega a

$$\sum_{j=1}^N \mu_{ij} q_j + q_i \frac{\sigma_{\epsilon}^2}{\sigma_{ii}} = \mu_{i0} ; \quad i = 1 \dots N \quad (2.36)$$

El sistema así obtenido es similar al mencionado por Haagenson, si se desprecia el error instrumental.

El cociente de  $\sigma_{00}/\sigma_{ii}$ , denominado windiness ratio por Johnson, es otra función a modelar. El mismo mide la natural variabilidad entre sitios, y en cierta medida se opone conceptualmente a la inicialización con una media espacial única para los valores  $S_0$ , criterio que es práctica corriente. Johnson lo modela arbitrariamente con la función  $e^{-0.01d^2}$ .

Esto es contradictorio en su propia esencia, ya que ese cociente no puede ser únicamente función de la distancia, pues si

$\frac{\sigma_{ii}}{\sigma_{00}} = f(d_{i0})$  y  $\frac{\sigma_{00}}{\sigma_{ii}} = f(d_{0i})$ , debería ser  $f(d_{i0}) f(d_{0i}) = 1$  lo que implica, (dado que  $d_{0i} = d_{i0} = d$ )  $f(d) = 1$ .

De todas formas, tampoco evoluciona en el caso uruguayo en forma decreciente con la distancia (ver fig. 2.2).

Una vez determinados los pesos  $\omega_i$  (o los  $q_i$ ), el valor de la perturbación en cualquier punto se calcula como

$$S'_0 = \sum_{i=1}^N q_i \frac{\sqrt{\sigma_{00}}}{\sqrt{\sigma_{ii}}} \hat{S}'_i \quad (2.37)$$

Como ya se mencionó, se asume para  $\mu_{ij}$ , y bajo las hipótesis de isotropía y homogeneidad, que es únicamente función de la distancia entre los puntos  $i$  y  $j$ .

En el caso uruguayo se disponía realmente de pocas estaciones, por lo que el rango de valores medidos de  $\mu(d)$  era muy limitado en lo que respecta a  $d$ .

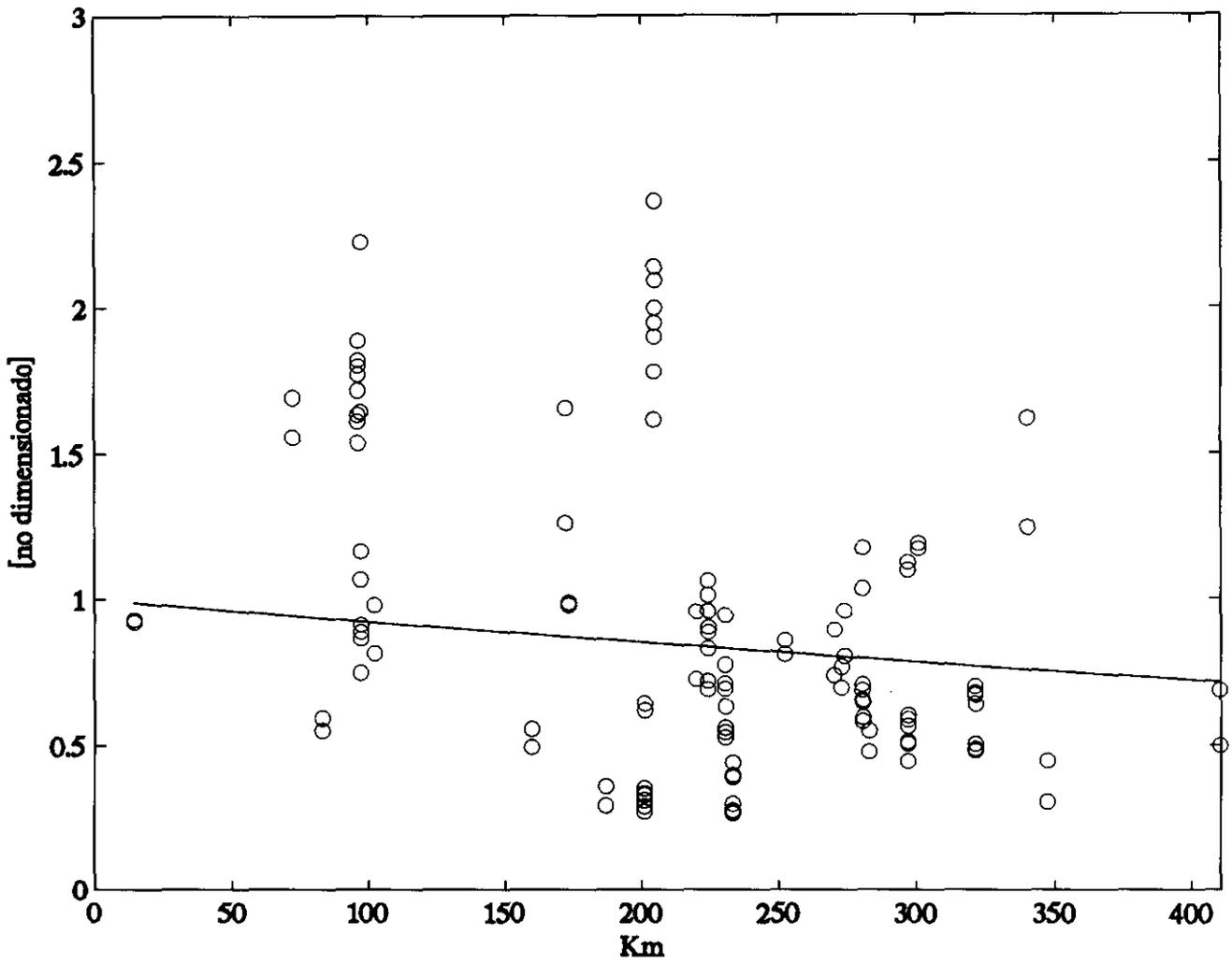


Fig. 2.2 Evolución de  $\frac{\sigma_{00}}{\sigma_{11}}$  según la distancia, y ajuste con una exponencial

De los análisis de las componentes zonal y meridional y sus correlaciones, se obtuvieron los resultados presentados en la fig. 2.3, que pudieron ser ajustados por una expresión del tipo

$$\mu(d)=1.0 \exp\left(-\frac{d(\text{Km})}{705}\right) \quad (2.38)$$

Obsérvese que el sistema a resolver tiene dependencia con el punto a interpolar únicamente a través del miembro de la derecha. Ello permite disminuir la demanda de cálculo, utilizando una descomposición QR, y resolver para cada punto dos sistemas de ecuaciones triangulares. Johnson destaca que en ocasiones, dado que las ecuaciones están mal condicionadas, es necesario utilizar métodos más robustos (descomposición en valores singulares) para la solución del sistema.

### 2.2.3 Estimación del viento en altura

La determinación del viento en altura (viento geostrófico) se realiza usualmente mediante sondeos.

En el Uruguay no está disponible esa información, aunque sí se registra cada 12 horas en el aeropuerto de Ezeiza (aproximadamente a 250 Km del dominio de interés).

Por ello, siguiendo a Endlich et al., 1982, se le estimó basándose en los registros disponibles de presión a nivel del mar.

El banco de datos, para los años 1982 y 1983, y para el período Marzo 1990 a Abril 1991 contiene registros de las horas 8, 14 y 20, en 16 estaciones distribuidas en todo el territorio nacional (ver fig. 2.4)

En ese trabajo, Endlich cita un método de su autoría basado en el uso de una terna de estaciones (Endlich y Clark, 1963), determinando la superficie de presiones y su gradiente, y con ello el viento geostrófico (Pedlosky, 1987, pp. 346)

El método, aplicado al caso de Uruguay, probó ser inapropiado. Dada la escala de longitudes involucradas ( $\approx 500$  Km) no es de esperar importantes discrepancias entre una terna y otra de estaciones. Sin embargo, las diferencias fueron significativas, tanto en módulo como en dirección.

Ello fue atribuido a errores en la serie de datos. Téngase en cuenta que al tomar únicamente tres estaciones, el plano de presiones está completamente determinado, y no hay forma de controlar errores aleatorios ni sistemáticos en las estaciones utilizadas. "Tres puntos determinan un plano, pero cuatro lo hacen mejor" (Anónimo)

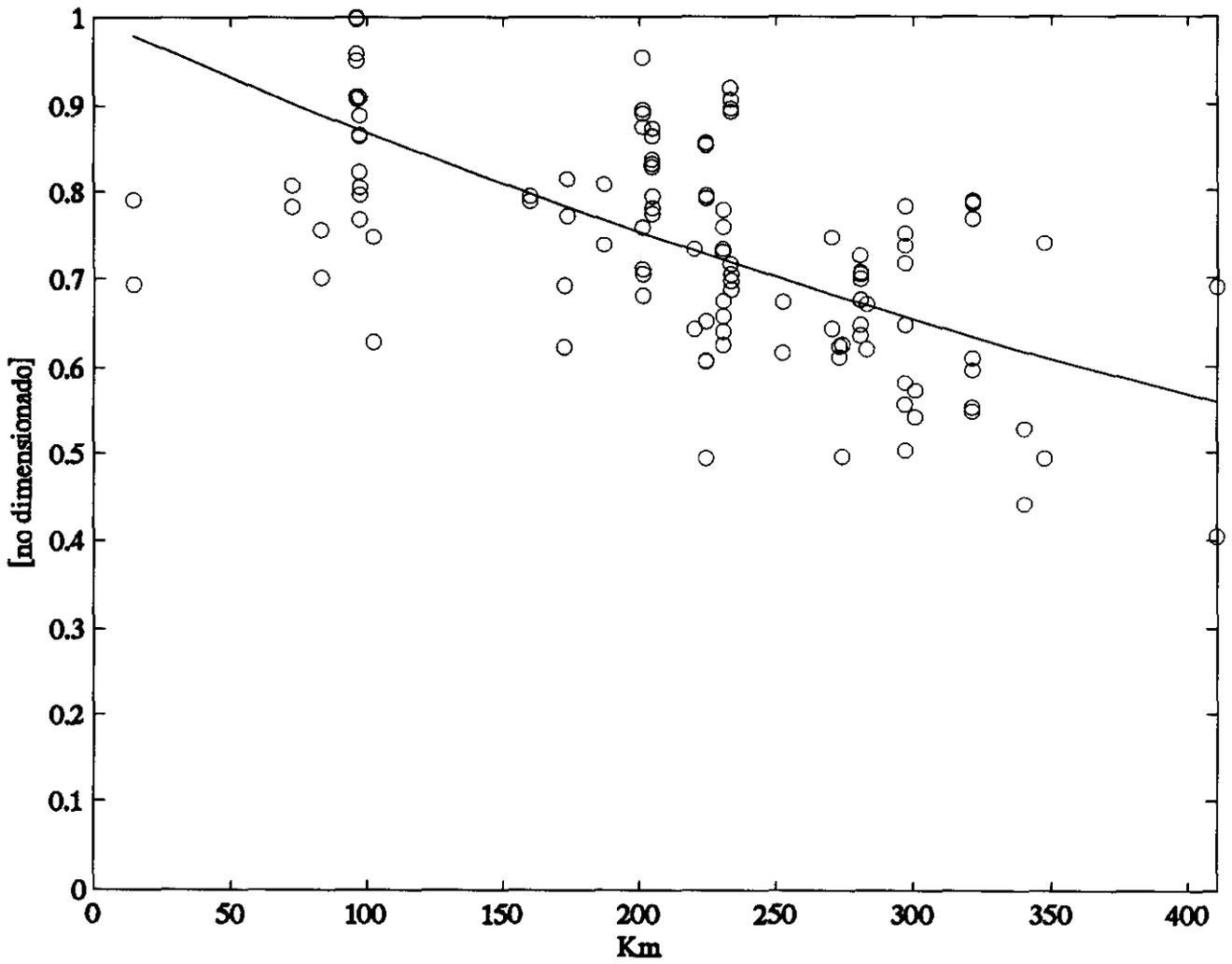


Fig.2.3 Evolución de la correlación con la distancia y ajuste propuesto



Fig. 2.4 Ubicación de las estaciones con lectura de presión

Por ello, se optó por realizar un análisis de componentes principales (Lebart et al., 1977) de los datos disponibles de 1982 y 1983.

Como se ilustra en 2.4, el campo de presiones se descompone en la forma

$$\mathcal{P}(x,y,\tau) = \overline{\mathcal{P}(x,y)} + a_1(\tau) \cdot \rho_1(x,y) + a_2(\tau) \cdot \rho_2(x,y) + \dots + a_n(\tau) \cdot \rho_n(x,y) \quad (2.39)$$

donde las dimensiones tanto de  $a_i(\tau)$  como del campo  $\mathcal{P}(x,y,\tau)$  son Pascales, siendo adimensionado el campo  $\rho_i(x,y)$ .

En realidad las superficies  $\mathcal{P}(x,y)$ ,  $\rho_i(x,y)$ , etc., están dadas por los valores en las estaciones dato, por lo que, en rigor

$$P(\tau) = \overline{P} + a_1(\tau) \vec{P}_1 + a_2(\tau) \vec{P}_2 + \dots + a_n(\tau) \vec{P}_n \quad (2.40)$$

Los  $a_i(\tau)$  son los mismos que en (2.39).  $P(\tau)$  contiene los registros en las  $n$  estaciones y  $\overline{P}$  es su media temporal.  $\vec{P}_i$  es un vector que contiene la  $n$ -upla de datos simultáneos.

$a_1(\tau) \vec{P}_1$  es el vector de dirección fija en el tiempo, y módulo variable, que mejor ajusta la diferencia

$$\left[ P - \left( \overline{P} + a_1(\tau) \vec{P}_1 \right) \right] \quad (2.41)$$

en el sentido de la norma  $L_2$ .

$a_2(\tau) \vec{P}_2$  es el vector que mejor ajusta la diferencia remanente,

$$\left[ P - \left( \overline{P} + a_1(\tau) \vec{P}_1 + a_2(\tau) \vec{P}_2 \right) \right], \text{ etc.} \quad (2.42)$$

Es un hecho general (Richman, 1986, Bhumralkar et al., 1982, etc.) que unos pocos términos explican lo esencial de la variabilidad del fenómeno, para una gran variedad de magnitudes físicas.

En este caso, ello es particularmente cierto, ya que, según la fig. 2.5, sólo el primer patrón explica el 95 % de la varianza.

Si bien es cierto que la superficie de presiones podría quedar razonablemente ajustada con un único término, hay que tener en cuenta que las componentes del viento geostrófico buscado se calculan como

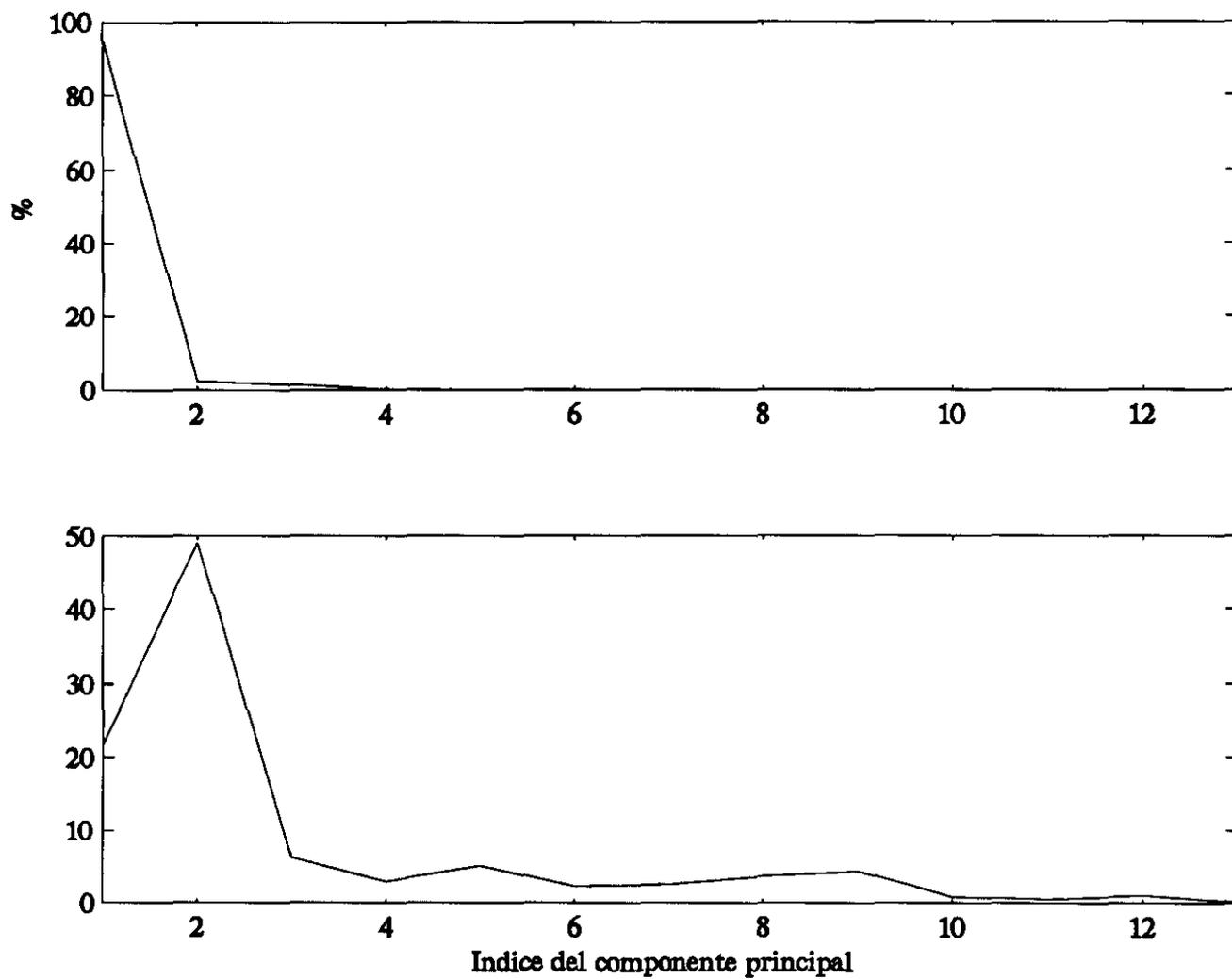


Fig. 2.5 a) Evolución de la tasa de inercia para el campo de presiones.  
 b) Idem ponderado para destacar el efecto de las derivadas parciales

$$u_c(\tau) \propto \frac{\partial \overline{\mathcal{P}(x,y)}}{\partial x} + \sum_{i=1}^n a_i(\tau) \frac{\partial \mathcal{P}_i(x,y)}{\partial x} \quad (2.43)$$

y que si bien  $a_i(\tau)$  puede ser típicamente pequeño para algún  $i$ ,  $\partial \mathcal{P}_i / \partial x$  puede ser importante, lo que nos obliga a retener más términos. Similar expresión vale para  $v_c(\tau)$ .

Con un ajuste mediante una función del tipo  $Ax+By+C$  se aproximaron las superficies  $\mathcal{P}_i(x,y)$ , y se obtuvieron directamente de A y B las derivadas parciales necesarias para el cálculo del viento geostrófico. Esto que puede parecer muy crudo, opera como un filtro contra los grandes errores de medida; de todos modos, las derivadas parciales incluidas en 2.43 deben ser evaluadas en algún punto  $x,y$  intermedio del dominio. En las figs. 2.6, 2.7 y 2.8 se presentan las isobaras del campo promedio, y las isolíneas de los patrones más importantes.

Del análisis de la fig. 2.5 se decidió adoptar 3 términos en la reconstrucción del campo de presiones instantáneo. El eliminar los términos más pequeños opera como un filtro pasabajos. El campo instantáneo resulta, pues, de

$$\mathcal{P}(x,y,\tau) \cong \overline{\mathcal{P}(x,y)} + \sum_{i=1}^3 a_i(\tau) \rho_i(x,y) \quad (2.44)$$

El viento geostrófico así calculado está disponible únicamente en tres registros diarios.

Para poder obtener una serie horaria, se utilizó un algoritmo de interpolación debido a Little et al., 1988. El mismo expande la serie de coeficientes con ceros, y luego le aplica un filtro pasabajos.

Tal interpolación se realizó independientemente para las tres series diarias, y luego se promedió el resultado obtenido.

Con la serie temporal de coeficientes obtenida, se generó una estación "ficta" de viento en altura, cuyo valor se asumió representativo para todo el territorio.

El viento geostrófico se supone válido para una altura tal, en la que ya no son perceptibles los efectos del terreno (Pedlosky, 1987, pág 346). Esa altura, que conforma una superficie, depende de muchos factores, y ha sido típicamente modelada como plana (Traci et al., 1978; Bhumralkar et al., 1980, etc.)

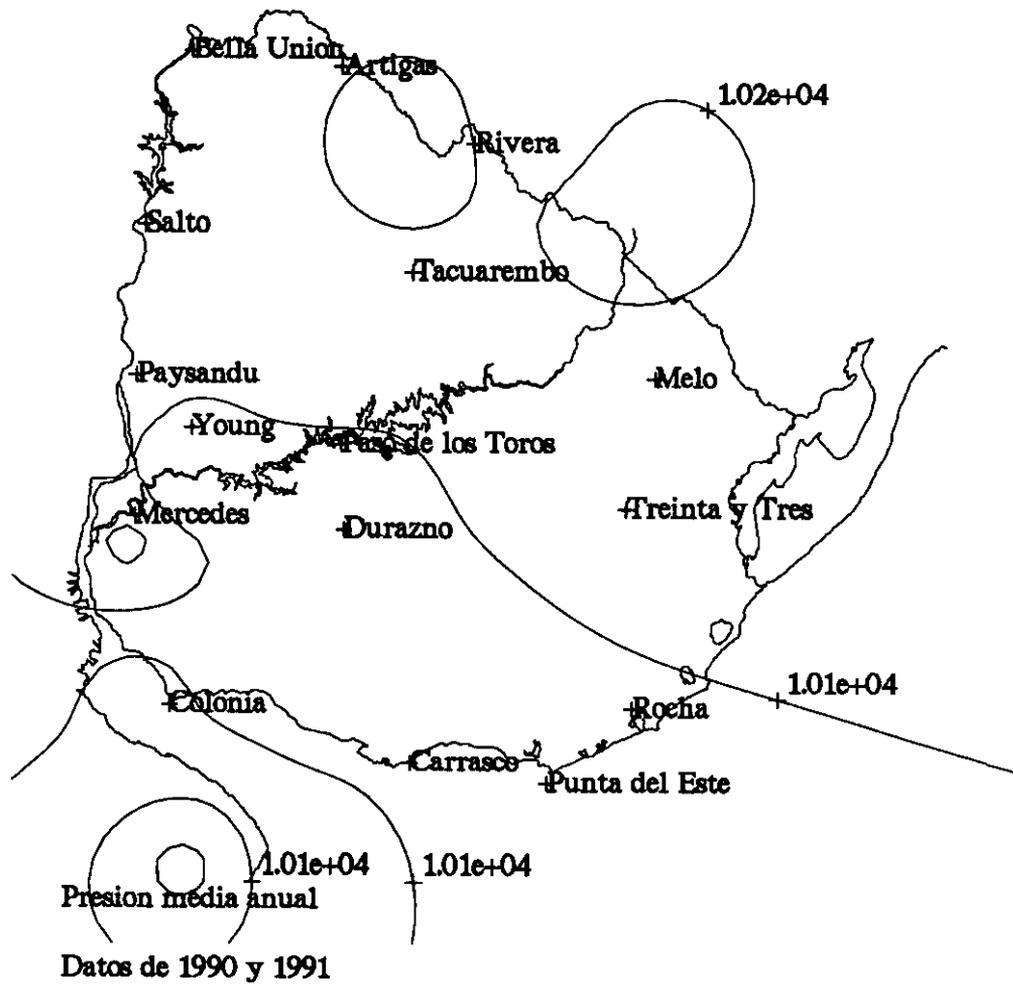


Fig. 2.6 Isobaras del campo medio de presiones

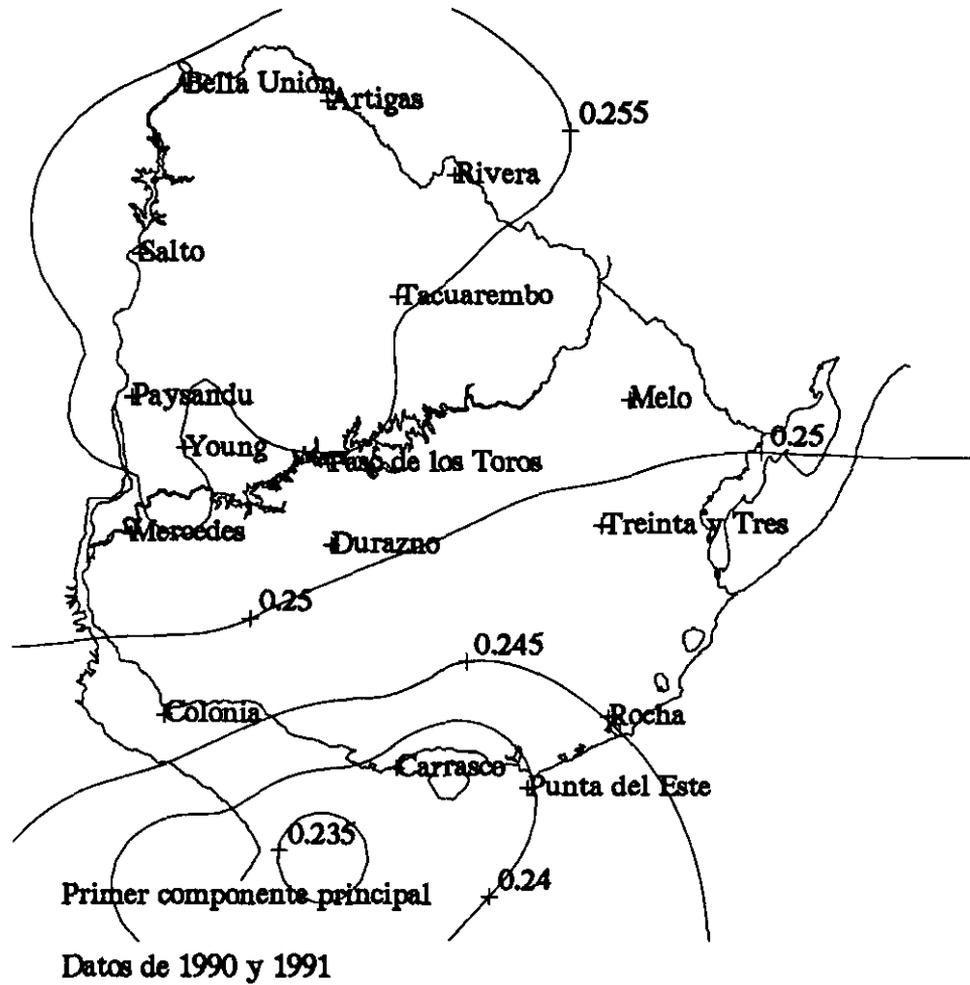


Fig. 2.7 Isolíneas del campo  $\mathcal{P}_1(x,y)$  correspondiente al primer componente principal

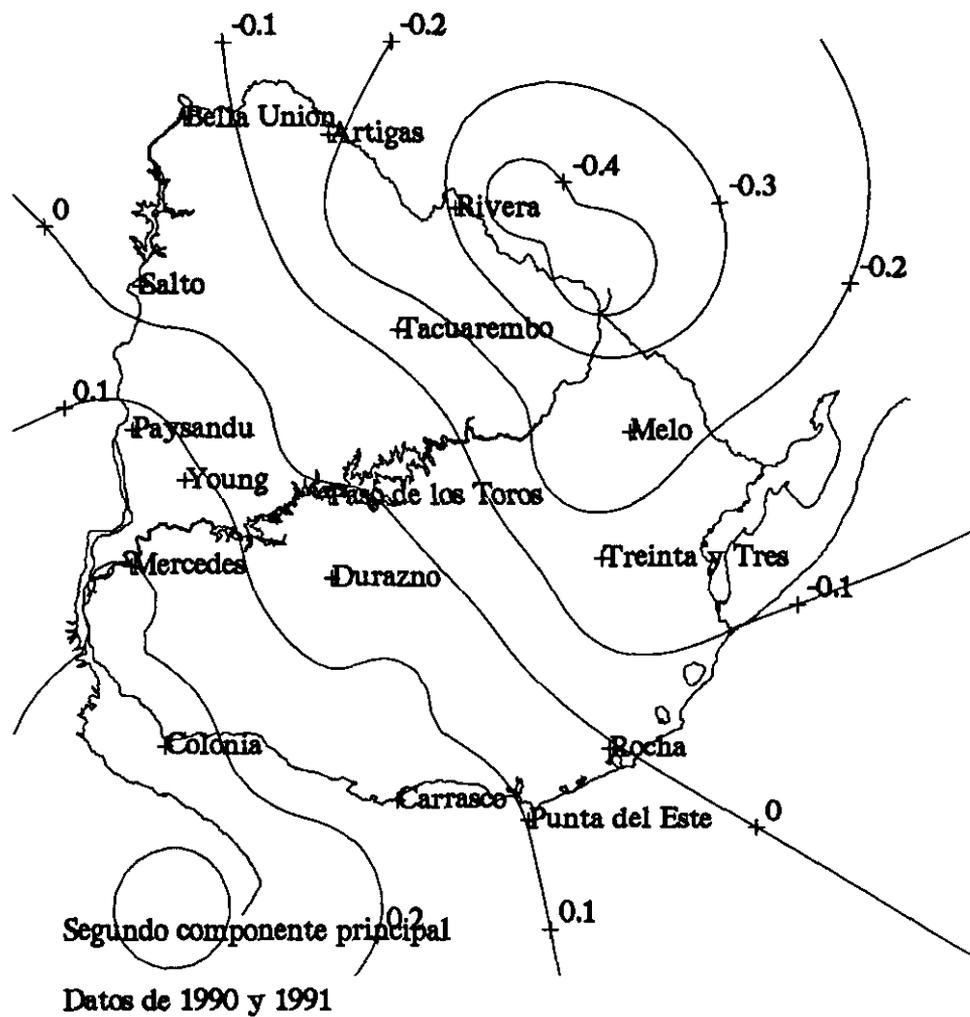


Fig. 2.8 Isolíneas del campo  $P_2(x,y)$  correspondiente al segundo componente principal

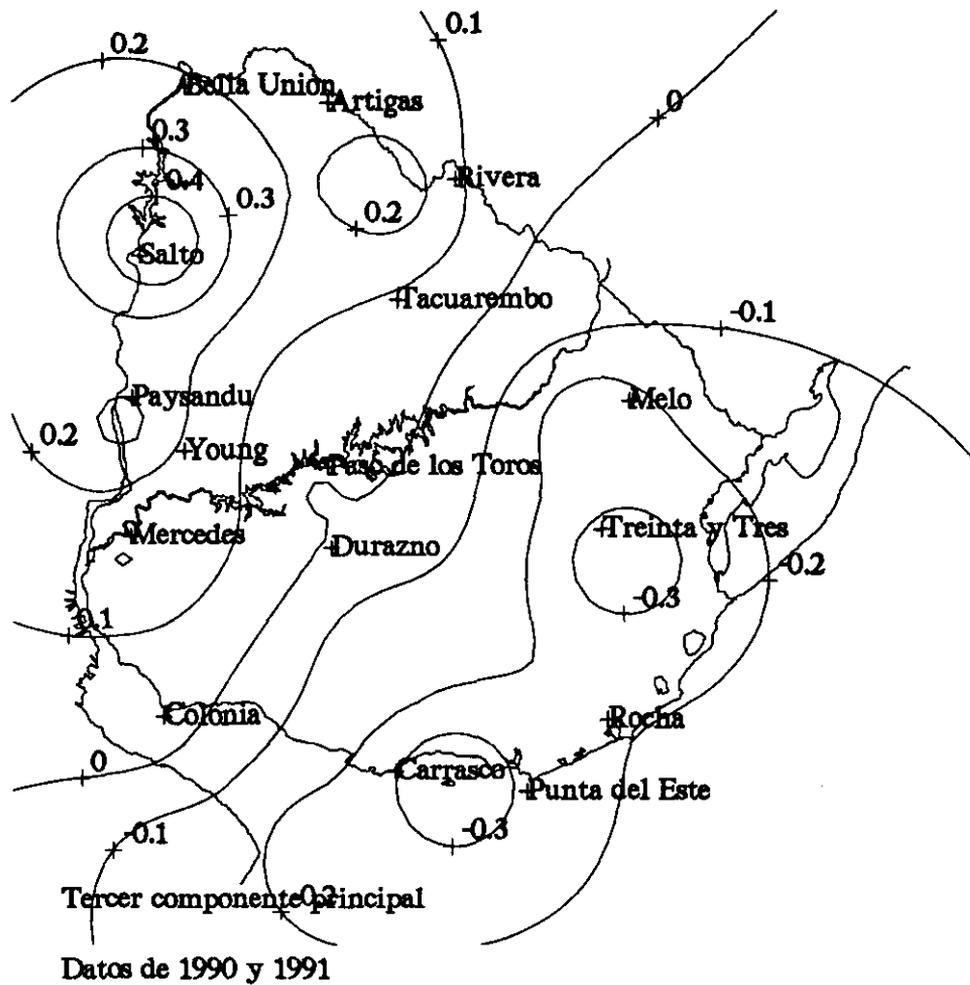


Fig. 2.9 Isolíneas del campo  $\mathcal{P}_3(x,y)$  correspondiente al tercer componente principal

En el trabajo de Endlich et al., 1982, se introduce el refinamiento de considerar variable según x,y la cota superior del dominio. Con ello se tiende a modelizar más precisamente las variaciones diurnas de la misma. Ello se ampliará en 2.3.

Sin perjuicio del cálculo detallado del viento geostrófico, también se retuvo como alternativa una extrapolación en la vertical siguiendo una ley potencial. Tal procedimiento es utilizado por Traci et al., 1978, Sherman, 1978, etc. y permite la comparación de resultados con otros programas.

Con alguna de estas especificaciones del viento en altura, y de la forma del tope de la capa límite, se procede a interpolar en la vertical.

Se procede como sigue:  $\bar{V}_0(x,y,10)$  es obtenido mediante una interpolación, a partir de los datos de un número dado, pequeño, de estaciones meteorológicas, para  $z = 10$  m, como se vio en 2.2.1 y 2.2.2.

Las componentes horizontales de la velocidad correspondiente al nodo i-ésimo ( $u_i, v_i$ ) se hacen variar con la altura, siguiendo una ley logarítmica o potencial, según se disponga del geostrófico o no.

Para el primer caso, la componente  $u_i(z)$  se calcula como

$$u_i(z) = u_i(z_{10}) + \left( u_c - u_i(z_{10}) \right) \frac{\log(z) - \log(z_{10})}{\log(z_c) - \log(z_{10})} \quad (2.45)$$

Para el segundo

$$u_i(z) = u_i(z_{10}) \left( \frac{z}{z_{10}} \right)^\beta \quad (2.46)$$

siendo:

- $u_i(z_{10})$  la velocidad interpolada a la altura del anemómetro.
- $u_c$  la velocidad del geostrófico calculada.
- $\beta$  exponente, que se asumió constante en todo el dominio.
- $z_{10}$  la cota del anemómetro, relativa al entorno circundante (típicamente, 10m).
- $z_c$  la cota (SNM) a la cual se asume válido el viento geostrófico.
- $z$  la cota (SNM) a la cual se está extrapolando el dato.

La primera formulación permite, a diferencia de la interpolación potencial, variaciones con la altura no solo en módulo sino también en dirección. Similares expresiones valen para las componentes  $v_1$ .

### 2.3. Especificación de la grilla en la vertical

En su trabajo, Sherman utilizó una grilla regular, tanto en la horizontal como en la vertical, resolviendo las ecuaciones en coordenadas "naturales"  $(x,y,z)$ , por el método de las diferencias finitas.

Traci et al., 1978, Bhumralkar et al, 1980 y Endlich et al., 1982 utilizaron una formulación diferente, en la que se alteraba la coordenada vertical, y por tanto, se resolvía una ecuación modificada. Traci utilizó como coordenada vertical la siguiente:

$$\sigma \equiv \frac{H - z}{H - h(x,y)} \quad (2.47)$$

mientras que los otros autores la definieron como

$$\sigma \equiv \frac{z - h(x,y)}{H(x,y) - h(x,y)} \quad (2.48)$$

siendo  $h(x,y)$  y  $H(x,y)$  definidos como antes.  $\sigma = 0$  corresponde con el piso y  $\sigma = 1$  corresponde con el techo en este último caso.

Con ello, se buscaba simplificar la imposición de las condiciones de borde, ya que en  $\sigma = 0$  y  $\sigma = 1$ , vale  $\delta = 0$ . En el espacio  $(x,y,\sigma)$ , el dominio de integración es un paralelepípedo, y la complejidad de la solución se traslada a la ecuación diferencial misma.

En esta formulación, se impone de hecho, mediante el uso de coeficientes de ponderación (similares al  $\alpha_1, \alpha_2$ ), que las superficies  $\sigma = \text{cte.}$  son superficies de corriente.

Las únicas dos superficies de corriente que tienen forma conocida son la topografía (para  $\sigma = 0$ ) y el tope de la capa límite (para  $\sigma = 1$ ). Las superficies  $\sigma = \text{cte.}$  intermedias son en principio arbitrariamente definidas.

Para el caso en que se resuelve la ecuación en variables "naturales", se adopta una discretización que tenga en cuenta estas cuasi-superficies de corriente en coordenadas  $(x,y,z)$ . Para  $x$  e  $y$ , se subdivide el espacio en una grilla regular, con paso determinado por los datos de topografía disponibles. Para  $z$ , en cambio, se seleccionan las cotas de los nodos sobre las superficies iso- $\sigma$ .

La especificación de estos niveles ha sido objeto de

recientes investigaciones. Así, Guo (Guo et al., 1990) propone utilizar, en el espacio  $(x,y,\sigma)$ , una separación vertical dada por

$$\sigma_n = \frac{1}{e^{-1} - 1} \left[ \exp\left(\frac{n-1}{N-1}\right) - 1 \right] \quad (2.49)$$

y en el espacio  $(x,y,z)$

$$\Delta z_n = \left( \sigma_{n+1} - \sigma_n \right) \left[ \bar{h} + C \left( 1 - \frac{n}{N} \right)^q \left( h(x,y) - \bar{h} \right) \right] \quad (2.50)$$

expresión que ya fue analizada.

Esta sugerencia ha sido recogida en el algoritmo, por lo que resulta otro parámetro a optimizar:  $q$ .

El hecho de adoptar una grilla no regular en la vertical, obliga a cuidar la formulación de los cocientes incrementales necesarios para la determinación de las derivadas parciales de  $\lambda$  buscadas.

Se procede de la siguiente manera:

Para los nodos de  $(i,j=cte,k=cte)$  que se ubican sobre una curva  $\mathcal{E}(x,y=cte, z=z(x))$  se ajusta  $\lambda=\lambda(s)$  por una spline, siendo  $s$  la abscisa curvilínea definida sobre esa curva  $\mathcal{E}$ .

A continuación, se calcula

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda}{\partial s} &= \nabla \lambda \cdot \vec{t} = \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial \lambda}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial \lambda}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} = \\ &= \frac{\partial x}{\partial s} \left[ \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial \lambda}{\partial z} \right] = \frac{1}{\partial s / \partial x} \left[ \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial \lambda}{\partial z} \right] \end{aligned} \quad (2.51)$$

Pero  $\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \int_0^x \sqrt{1 + \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2} dx \right] = \sqrt{1 + \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2}$ , con lo que

$$\frac{\partial \lambda}{\partial s} \sqrt{1 + \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2} = \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial \lambda}{\partial z} \therefore$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \frac{\partial \lambda}{\partial s} \sqrt{1 + \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2} - \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial \lambda}{\partial z} \quad (2.52)$$

Análogamente para  $\frac{\partial \lambda}{\partial y}$ . El término  $\frac{\partial \lambda}{\partial z}$  se calcula directamente, puesto que para  $\mathcal{E}(x=cte, y=cte, z)$  la derivada  $\frac{\partial \lambda}{\partial s} \equiv \frac{\partial \lambda}{\partial z}$ .

## 2.4 Descomposición de datos por el Análisis de Componentes Principales (ACP)

El ACP es una técnica estándar para simplificar el manejo de grandes volúmenes de datos. Richman (1986) presenta el estado del arte, e ilustra algunas deficiencias de la técnica, en lo que hace a la interpretabilidad física de los patrones.

Aquí se ha introducido para explotar las propiedades de linealidad del modelo. La idea es integrar directamente las ecuaciones no para todos y cada uno de los eventos horarios disponibles, sino hacerlo para un número relativamente pequeño de casos, obteniendo la serie horaria mediante una combinación lineal. Tal combinación puede realizarse partiendo de distintas bases; las componentes principales son sólo una de las posibles, con sus ventajas e inconvenientes.

Utilizando un enfoque sugerido por Ludwig, la solución completa en un instante dado se obtiene sumando las contribuciones ponderadas de cada patrón, según el siguiente esquema:

$$\bar{V}(\tau) \cong \bar{V}_m + \sum_{j=1}^k a_j(\tau) \bar{V}_j ; \quad k \leq 2n \quad (2.53)$$

Obsérvese que la expresión que antecede es exacta para  $k=2n$ , que únicamente vincula los datos existentes en las estaciones meteorológicas a través de vectores  $\bar{V}_m$  y  $\bar{V}_j$ , que no dependen del tiempo, y de coeficientes que se calculan a partir de los datos horarios en las  $n$  estaciones. La integración de las ecuaciones sólo requiere de un vector de datos del tipo de  $\bar{V}_j$ , ya que el modelo no incorpora términos de variación con respecto al tiempo. La fig. 2.10 ilustra la operativa completa.

Es oportuno reiterar que la descomposición, así como los resultados, son exactos para  $k=2n$ , y más o menos aproximados, en otro caso.

Lo que aquí se presenta es un extracto tomado del trabajo de Cisa et al., 1990, y fundamentalmente tiene que ver con la forma de calcular los componentes en sí.

Si se selecciona un subconjunto de  $n$  estaciones meteorológicas, en las cuales existen medidas simultáneas de velocidad y dirección de viento, se llamará  $\bar{V}(\tau)$  al vector columna formado por:

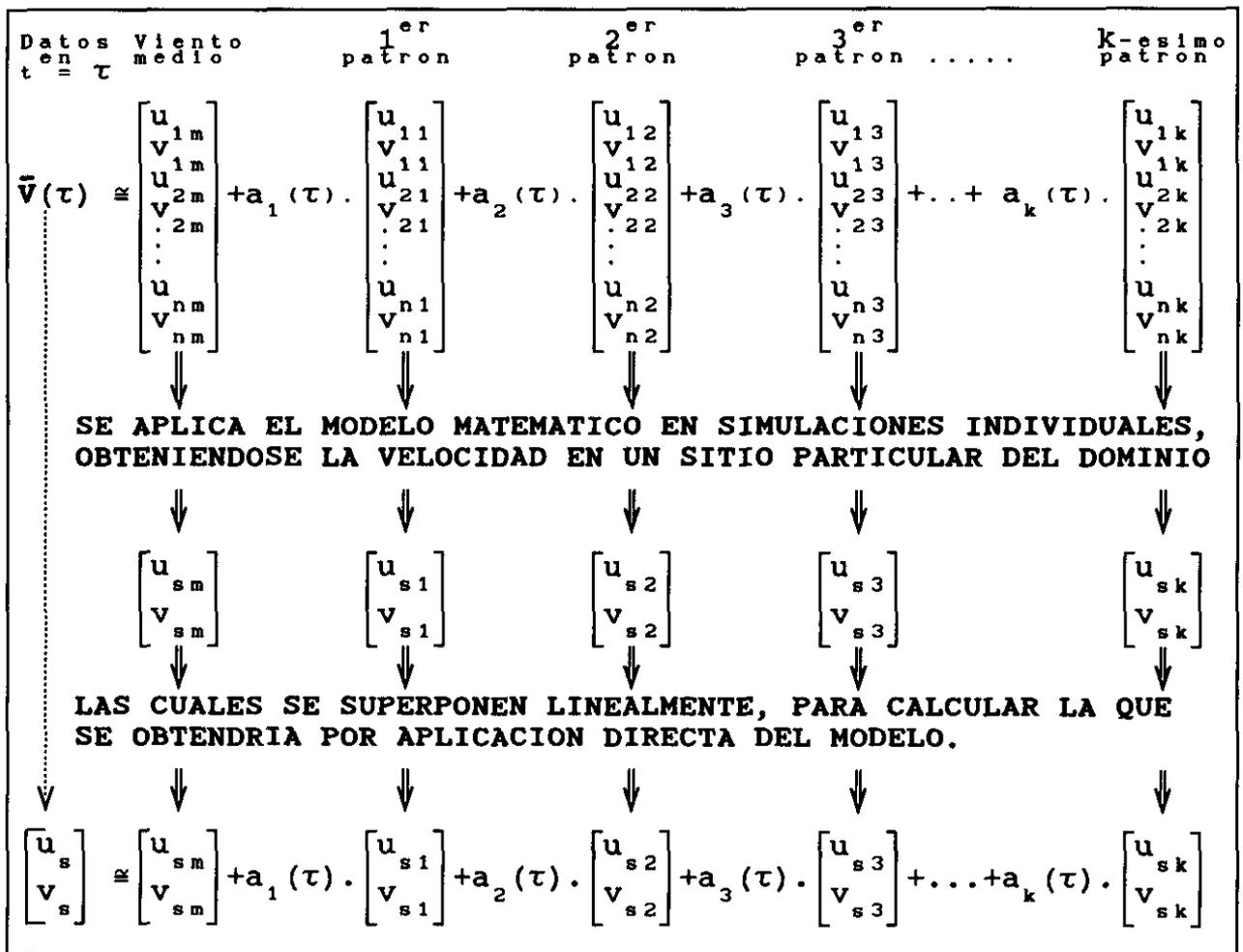


Fig. 2.10 Esquema de la reconstrucción lineal del campo horario

$$\bar{V}(\tau) = [u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, u_4, v_4, \dots, u_n, v_n]^T \quad (2.54)$$

siendo  $u_i, v_i$  las componentes del viento según la dirección  $W \rightarrow E$  y  $S \rightarrow N$ , respectivamente. La dimensión de  $\bar{V}(\tau)$  es  $2n \times 1$ .

Es inmediato que  $\bar{V}(\tau)$  se puede escribir como:

$$\bar{V}(\tau) = \bar{V}_m + \sum_{i=1}^{2n} a_i(\tau) \bar{V}_i \quad (2.55)$$

siendo  $a_i$  función escalar del tiempo,  $\bar{V}_m$  la velocidad promedio y los  $\bar{V}_i$  vectores de dimensión  $2n \times 1$ , que formen una base (independientes del tiempo).

Una vez seleccionados tales vectores, se calculan los  $a_i(\tau)$  de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \bar{V}(\tau) - \bar{V}_m &= \sum_{j=1}^{2n} a_j(\tau) \bar{V}_j \quad \text{y multiplicando escalarmente por } \bar{V}_i \\ \left( \bar{V}(\tau) - \bar{V}_m \right) \times \bar{V}_i &= \sum_{j=1}^{2n} a_j(\tau) \left( \bar{V}_j \times \bar{V}_i \right) \end{aligned} \quad (2.56)$$

Si se elige la base  $\bar{V}_i$  de modo que sea ortogonal, resulta

$$\left( \bar{V}_j \times \bar{V}_i \right) = \begin{cases} |\bar{V}_i|^2 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (2.57)$$

El miembro de la derecha queda

$$\sum_{j=1}^{2n} a_j(\tau) \left( \bar{V}_j \times \bar{V}_i \right) = a_i(\tau) \times |\bar{V}_i|^2 \quad (2.58)$$

Si además se normaliza la base, será  $|\bar{V}_i|^2 = 1$ , por lo que

$$\left[ \bar{V}(\tau) - \bar{V}_m \right] \times \bar{V}_1 = a_1(\tau) \quad (2.59)$$

Se deduce sin dificultad que los  $a_1$  son, en promedio, nulos.

La idea es elegir los  $\bar{V}_1$  de forma que ajusten o aproximen los datos instantáneos de manera óptima.

Tal óptimo se considera en el sentido de los mínimos cuadrados. Así, si se representa, sin perder generalidad, la nube  $\bar{V}(\tau)$  para el caso de  $n=2$ , el vector  $\bar{V}_1$  es aquel que minimiza la suma de las aproximaciones  $\bar{P}_1$

$$\Delta_1 = \sum_{\tau} \bar{P}_1^2; \quad \bar{P}_1 = \bar{V}(\tau) - \bar{V}_m - a_1(\tau) \bar{V}_1 \quad (2.60)$$

Gráficamente, cada sumando de  $\Delta_1$  es el cuadrado de la distancia indicada como  $\overline{M_k H_k}$  en la figura 2.11. En ella cada punto  $M_k$  corresponde a una terna de observaciones en un instante  $\tau$ . El subíndice en  $\bar{P}_1$  indica cuantos términos se incorporan en el cálculo.

Una vez determinada la dirección de  $\bar{V}_1$  (el sentido es indiferente) queda definido  $a_1(\tau)$  (a menos del signo), y se aplica el mismo criterio para aproximar la nube de puntos  $\bar{V} - \bar{P}_1$ . Ella pertenece al plano ortogonal a  $\bar{V}_1$  por el origen, por lo que la dimensión del problema es ahora  $2n-1$ . En forma análoga, se pueden determinar los  $\bar{V}_k$   $k=1..2n$ , minimizando respecto a  $\bar{V}_k$

$$\Delta_k = \sum_{\tau} \bar{P}_k^2; \quad \bar{P}_k = \bar{V}(\tau) - \bar{V}_m - \sum_{j=1}^{j=k} a_j(\tau) \cdot \bar{V}_j \quad (2.61)$$

para cada  $k$ . En general,  $\bar{V}_k$  está unívocamente determinado, siempre que el rango de la matriz  $M$  sea  $2n$ , siendo  $M$  definida como

$$M = \left[ \bar{V}(\tau_1), \bar{V}(\tau_2), \dots, \bar{V}(\tau_t) \right] \quad (2.62)$$

De acuerdo a Lebart et al., 1977, los vectores  $\bar{V}_j$  se pueden

hallar mediante el llamado análisis de componentes principales, de la siguiente forma:

Se define la matriz  $A_{(2n,2n)}$  formada como  $A = M \times M^T$  siendo  $n$  definido como antes,  $t$  el número de observaciones, y  $\bar{V}(\tau_i)$  el vector columna correspondiente a la  $i$ -ésima observación.

Se puede demostrar que los vectores propios de  $A$  son los  $\bar{V}_i$  buscados, y que los valores propios de  $A$  ponderan el peso de cada uno de los  $\bar{V}_i$  en el conjunto de los datos.

Es de hacer notar que  $A$  no depende del tiempo, ya que se usan todos los  $\bar{V}(\tau)$  en su cálculo.  $A$  se denomina matriz de covarianza.

Suele expresarse la varianza remanente  $\Delta(k)$  en forma adimensional, en el llamado porcentaje de varianza o también tasa de inercia, que se define como

$$I_k = \frac{\Delta(k)}{\Delta(0)} \quad (2.63)$$

tomando  $I_k$  valores comprendidos entre 1 (para  $k=0$ ) y 0 (para  $k=2n$ ). En la fig. 2.12 se presenta la evolución de tal cantidad para el caso del viento.

## 2.5. Calibración de los parámetros empíricos; estimador del error

Hasta el momento, se han presentado los conceptos involucrados en el diseño del modelo, así como diversos detalles de sus diferentes secciones.

Dado el carácter semi-empírico del modelo, resultan una serie de parámetros a calibrar, que se resumen en la Tabla 2.1.

De entre todos los mencionados, hay algunos que tienen diferente importancia. Los señalados con (\*), por ejemplo, sólo son activados para ciertas combinaciones de los parámetros del problema, por lo que pueden ser superfluos en algunas condiciones.

En el caso señalado con (\*\*), el efecto observado fue poco significativo, dependiendo los resultados muy débilmente de la relación  $H_m/H_a$ . Es por ello que en definitiva no se le incluyó entre los parámetros a ajustar. Se adoptó una relación fija  $h_m/h_a=0.7$  para la calibración. No debe sorprender que haya un parámetro dimensionado a calibrar; la altura a la que se toman los registros (típicamente 10 m sobre el terreno) sería la que escalaría el valor de  $h_a$ .

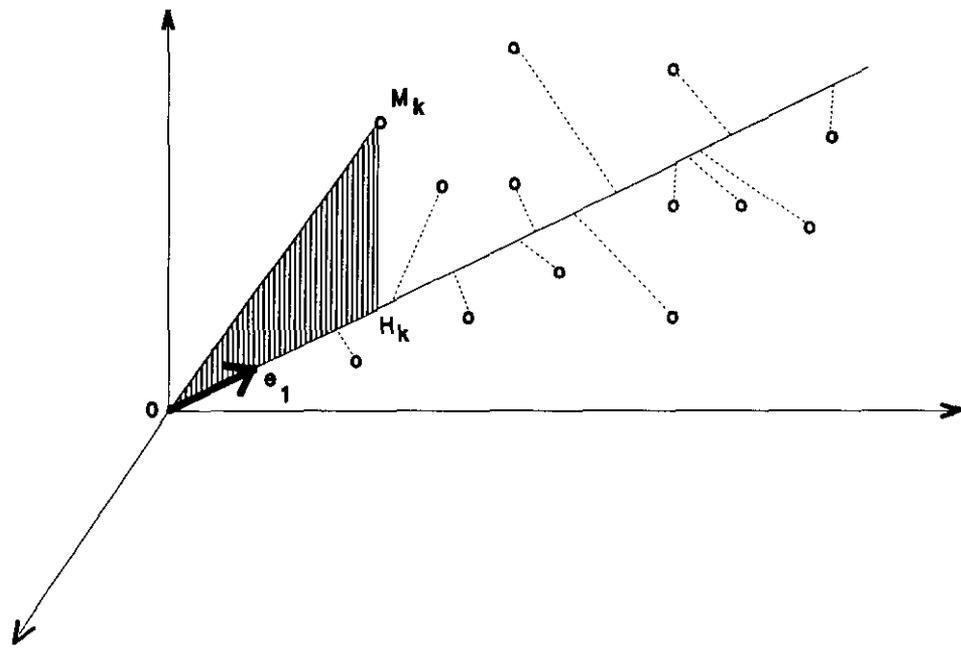


Fig. 2.11 Ajuste de la nube de puntos en  $R^n$  mediante un único componente principal (representación para  $n=3$ )

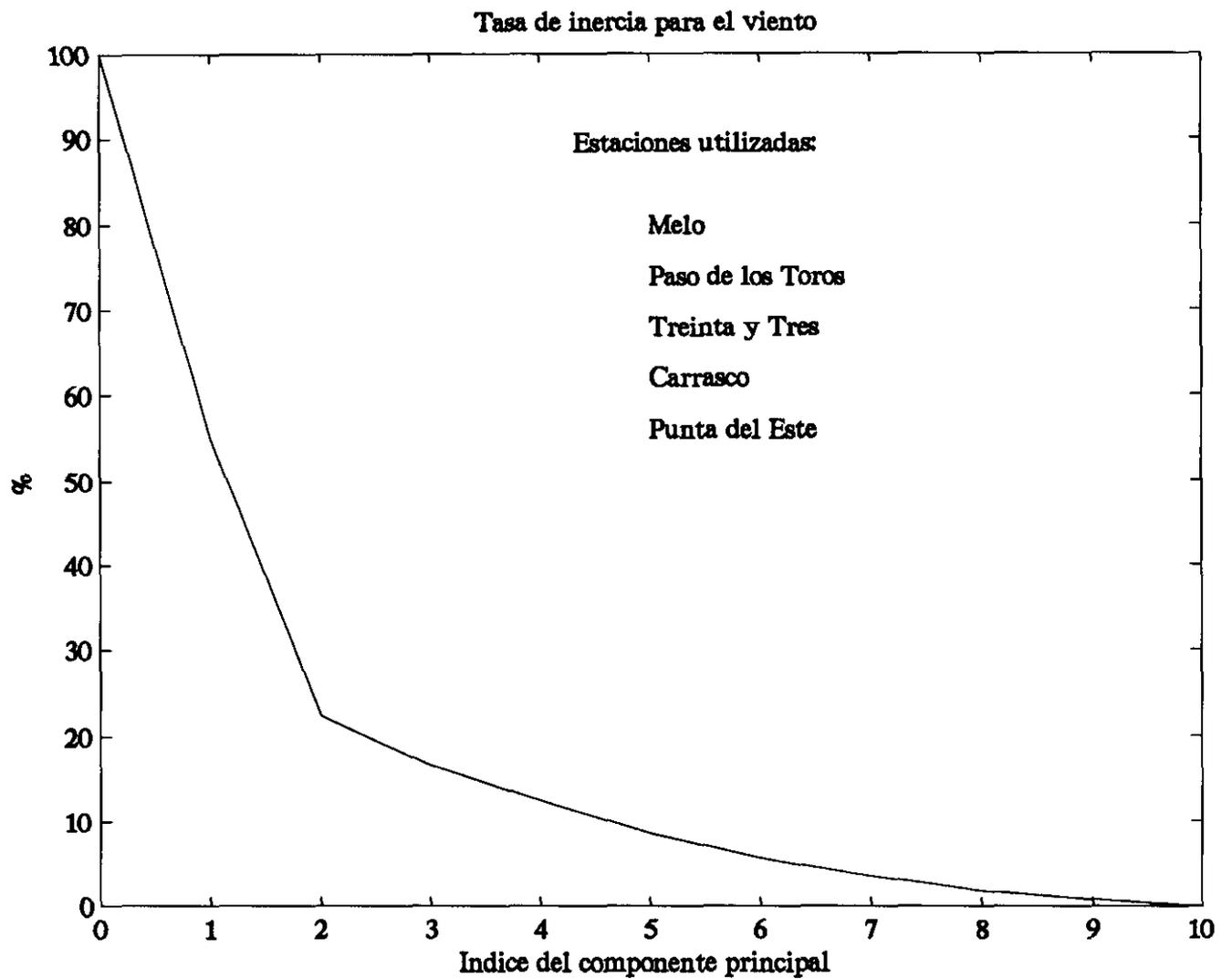


Fig. 2.12 Evolución de la tasa de inercia para el campo de viento

Denominación y significado	dimensiones	Definido en
$\alpha_1, \alpha_2$ Relación entre las correcciones normal y tangente a la velocidad interpolada	no	1.2.1 ec. 1.9
$\beta$ Exponente del perfil exponencial de velocidad con la altura (*)	no	2.2.3 ec. 2.46
$H_a$ Altura promedio en el dominio, del tope de la capa límite	metros	1.2.1 ec. 1.24
$H_m$ Espesor mínimo admisible de la capa límite (**)	metros	1.2.1
$k$ Pendiente relativa del tope de la capa límite	no	1.2.1 ec. 1.24
$q$ Parámetro de la expresión debida a Guo (*)	no	1.2.1 ec. 1.39

Tabla 2.1 Parámetros a ser calibrados

Los parámetros  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  sólo influyen a través de su cociente, por lo que se eliminó uno de ellos de la lista. Esto si bien es cierto desde el punto de vista matemático, puede acarrear problemas en la manipulación numérica, puesto que los valores del multiplicador  $\lambda$  pueden llegar a ser muy grandes, si  $\alpha_1$  lo es.

Dado que en las derivadas parciales aparecen diferencias de  $\lambda$ , se pueden evidenciar fenómenos como la cancelación catastrófica, al restar dos números muy grandes, pero parecidos.

Resulta, pues, un problema en el que están perfectamente delimitados los parámetros a variar; para expresar completamente el mismo como un problema de optimización, resta incluir restricciones a los valores admisibles, y lo más importante, definir una función objetivo.

Los rangos adoptados ya fueron esbozados en lo previo; para  $\alpha_1/\alpha_2$  se admite desde 1 hasta  $10^{-15}$ . Tanto para  $q$  como para  $\beta$  se admiten los valores comprendidos entre 0 y 1 (probablemente,  $\beta$

podría restringirse aún más); para la altura media de la capa límite, se encontró que el rango apropiado es entre 500 y 2500 m.

La función objetivo es algo más delicado. En principio, dado que lo que se busca es que el modelo ajuste contra las observaciones, se propuso generar un conjunto de números que midieran el ajuste entre la serie temporal calculada y medida. Ello se reveló como difícil, dado el corto período en que estaban disponibles lecturas simultáneas. No debe olvidarse que el modelo trabaja sólo cuando todas las estaciones involucradas tienen datos simultáneamente (dado que sólo así se pueden calcular los coeficientes de los componentes principales).

En el período marzo de 1990 - diciembre de 1991, la estación de Punta del Este operó sólo en horario diurno, por lo que no hay registros entre las 20 y 8 horas, lo que restringió aún más la población de eventos utilizables. El banco de datos tiene una frecuencia de muestreo horaria para el viento en prácticamente todas las estaciones, y cada ocho horas para la presión, como ya se ha señalado.

Teniendo en cuenta las dificultades indicadas se decidió, a los efectos de la calibración, no comparar las series, sino las distribuciones de velocidad. Ello tiene la virtud de permitir utilizar conjuntos no simultáneos de datos, entre la estación testigo y los datos de entrada. Además, la población de eventos aumenta sensiblemente.

La comparación de las series será, pues, una medida independiente de la bondad del ajuste de las distribuciones, tal como se verá en la parte 4.1.3.

Como estimadores de la similitud de las dos distribuciones, se utilizó una mezcla de indicadores. Ellos fueron la diferencia en valor absoluto de las velocidades medias, de las modas (valor más probable), discrepancia máxima de la diferencia de los dos histogramas y la desviación estándar de la misma diferencia (normas  $L_1$  y  $L_2$  de la diferencia).

Dado que todos estos estimadores son dimensionalmente consistentes y admiten valores únicamente positivos, se tomó como función objetivo el promedio aritmético de los cuatro.

A su vez, se adoptó el criterio de utilizar no una única estación testigo, sino varias, con el objeto de disminuir el impacto de eventuales errores aleatorios en los datos.

Para realizar la operación de calibrar propiamente dicha, se utilizó la función CONSTR (Grace, 1990), disponible en el ambiente MATLAB. La misma no requiere de los gradientes de la función objetivo, y admite el uso de restricciones a los parámetros.

No se realizó ningún análisis específico respecto a su eficiencia en este problema; por otra parte, el tiempo de cálculo del sistema es mucho mayor que el requerido por las operaciones propias del algoritmo de optimización.

### 3. VALIDACIONES EFECTUADAS CON CAMPOS DE VELOCIDAD CONOCIDOS

Dado que con una apropiada selección de parámetros es posible simular escurrimientos potenciales, se diseñaron pruebas con campos bidimensionales y tridimensionales, que tienen expresión analítica. La referencia fue el clásico libro de Milne-Thompson (1949).

#### 3.1. Escurrimientos potenciales

##### 3.1.1. Casos bidimensionales

A los efectos de probar el sistema desarrollado, se generaron topografías  $z=T(x,y)$  con sección transversal constante  $T(x,y)=T(x_0,y)$  para todo  $x$ . Por ello los cálculos fueron en realidad tridimensionales, pero las imágenes así como los resultados, se tomaron sobre un corte transversal al modelo. Las condiciones de borde fueron también levemente modificadas para considerar esta situación. Un ejemplo del aspecto de tales topografías está presentado en la fig. 3.1.

En el caso bidimensional, el escurrimiento puede analizarse con variable compleja. En todos los casos, la descripción del campo viene dada bajo la forma de su potencial complejo  $W$ . Debe interpretarse a la componente  $u$  como velocidad horizontal, y a la  $v$  como vertical.

El campo de velocidad es  $u - iv = -\frac{dW}{dz}$ ;  $z$  es la variable compleja, que se asimila con  $z = x + iz$  ( $z$  coordenada vertical)

En todos los ejemplos, las magnitudes  $u_0$ ,  $a$  y  $m$  son números reales. Se han analizado casos en los cuales existen líneas de corriente perfectamente definidas, asimilables a fronteras sólidas, las que se utilizan como topografía de entrada.

Se analizan:

a) Fuente puntual en una corriente uniforme (M.T., pp. 196)

La velocidad de la corriente ( $u_0=10$  m/s) es paralela al eje Ox. La fuente se ubica sobre el mismo eje, y tiene intensidad  $m=10000$  ( $m^3/s$ )/m.

El potencial de velocidad y su derivada son, respectivamente:

$$W = u_0 z + m \log(z-a) \quad (3.1)$$

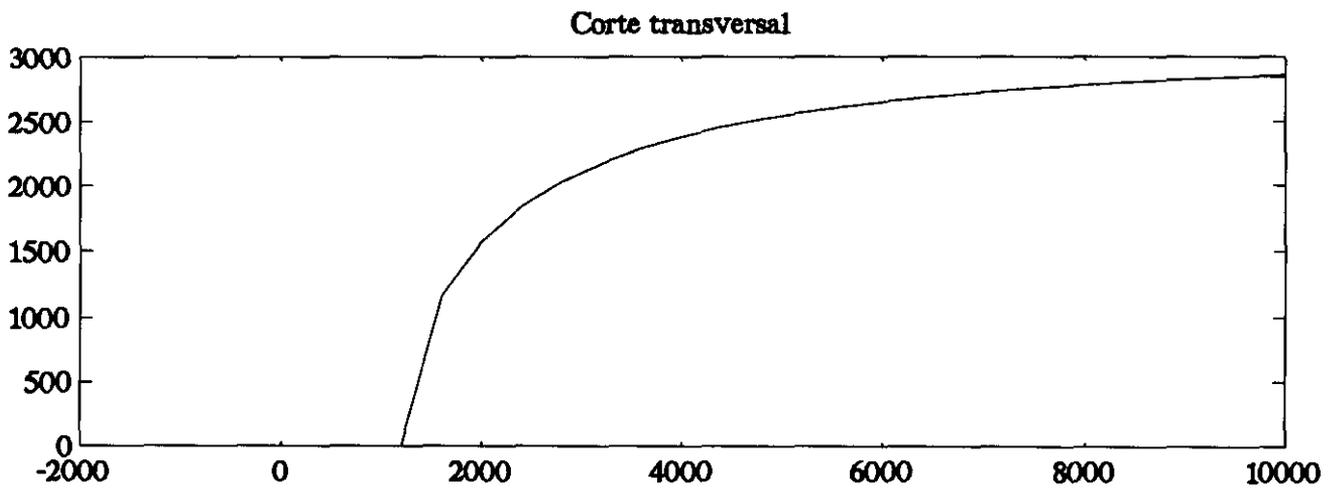
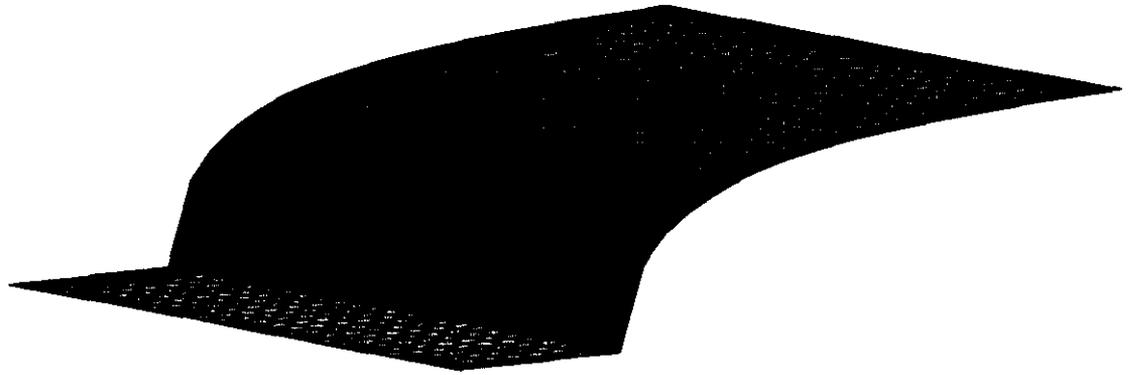


Fig. 3.1 Vista de la topografía (en versión tridimensional) y del corte transversal, para el caso de la fuente puntual en corriente uniforme.

$$\frac{dw}{dz} = u_0 + \frac{m}{z-a} \quad (3.2)$$

Existe un punto de estancamiento, cuyas coordenadas son  $z=-m/u_0=-1000$  m para los parámetros  $m$  y  $u_0$  seleccionados. La línea de corriente que pasa por ese punto separa el flujo en dos zonas, y por ello se la considera como frontera.

La forma funcional de la superficie mencionada responde a  $x=-\frac{h}{\text{tg}(hU/m)}$ , siendo  $h$  la cota sobre el terreno. En la fig. 3.1 se ilustra la topografía correspondiente. El flujo incide desde la izquierda.

Se realizaron varios tanteos con los parámetros libres, intentando ajustar los resultados teóricos con los cálculos en un único punto. Se fijó  $\alpha_1/\alpha_2 = 1$  (con lo que se resolvió exactamente la ecuación de Poisson) y se incluyó un viento geostrófico igual a  $u_0$  (con lo que  $\beta$  no incide). Se suministraron únicamente dos puntos-dato, ubicados a una cota de 10 m sobre el terreno, en  $x=0$  y  $x=-2000$ . La información sólo incluía la componente horizontal de velocidad.

Los parámetros libres son:  $Ha$ ,  $k$  y  $q$  respectivamente. Se realizaron algunos ajustes jugando con  $ha$  y  $k$ , fijando  $q=0$  (valor por defecto). Los resultados obtenidos para el punto de coordenadas  $x=4000$  m, y cota 10 m sobre el piso se muestran en la siguiente tabla

Valores exactos de $u$ y $w$ para:					
		x=1000 m		x=4000 m	
Ha (m)	k	u (m/s)	w (m/s)	u (m/s)	w (m/s)
		11.953	3.946	12.529	2.476
2000	0	10.810	0.747	11.044	0.654
3000	0	9.931	0.685	9.989	0.596
1500	0	12.177	0.824	12.778	0.747
1500	0.5	9.826	0.677	9.878	0.590
1500	0.05	11.800	0.800	12.300	0.721

Tabla 3.1 Valores obtenidos para el ajuste del caso a) con una grilla gruesa

Se aceptó como definitivo el valor obtenido en la última fila. Obsérvese que las columnas de la derecha fueron utilizadas como testigo, y se calibró por las correspondientes a la coordenada  $x=1000$  m. El dominio se discretizó con 19 elementos en la dirección transversal al modelo (colineal con el flujo), 2 en la

longitudinal y 9 en la vertical.

Si se utiliza una definición de la topografía más fina, asociada ahora a 39 elementos en la dirección transversal, se pueden obtener predicciones algo diferentes.

Valores exactos de u y w para:					
		x=1000 m		x=4000 m	
Ha (m)	k	u(m/s)	w(m/s)	u(m/s)	w(m/s)
		11.953	3.946	12.529	2.476
1500	0.05	10.690	0.707	10.687	0.708
1500	0	10.808	0.715	10.804	0.716
1400	0	10.997	0.726	10.992	0.727
1300	0	11.281	0.738	11.277	0.739
1200	0	11.530	0.755	11.526	0.756
1100	0	11.868	0.771	11.860	0.772
1100	0.8	9.127	0.609	9.127	0.610
1100	0.5	10.007	0.664	10.002	0.660
1200	0	11.530	0.755	11.526	0.756
1100	-0.1	12.329	0.790	12.321	0.791
1100	0.1	11.462	0.752	11.458	0.753

\*

Tabla 3.2 Valores obtenidos para el ajuste del caso a) con una grilla fina

El valor más ajustado se indica con un asterisco.

Para ilustrar el efecto del parámetro  $q$  de Guo, definido en la ec. 1.39, se manejaron dos valores extremos del parámetro: en la primera,  $q=0$ ; en la segunda,  $q=1$ . Nótese en las figuras 3.2 y 3.3 que la forma del techo del dominio fue modificada. Ello es debido a que se obliga a que ninguna capa tenga localmente un espesor menor a 10 m, por lo que se afecta el espesor global mínimo  $h_m$  en forma iterativa.

En ambas figuras, la separación entre niveles a la izquierda es regular; en la figura 3.2, también lo es a la derecha. Ello no ocurre en la figura 3.3, lo que hace que la disminución del área en el 'tubo de flujo' más próximo al techo sea mucho menor que la que se observa cerca del piso.

Este efecto no se manifiesta, sin embargo, en el campo de velocidades, ya que al adoptarse el valor  $\alpha_1/\alpha_2 = 1$  en lugar de uno mucho más pequeño, no se obliga al flujo a respetar los niveles de cálculo como superficies de corriente. Ello sí se hace en el caso con topografía real.

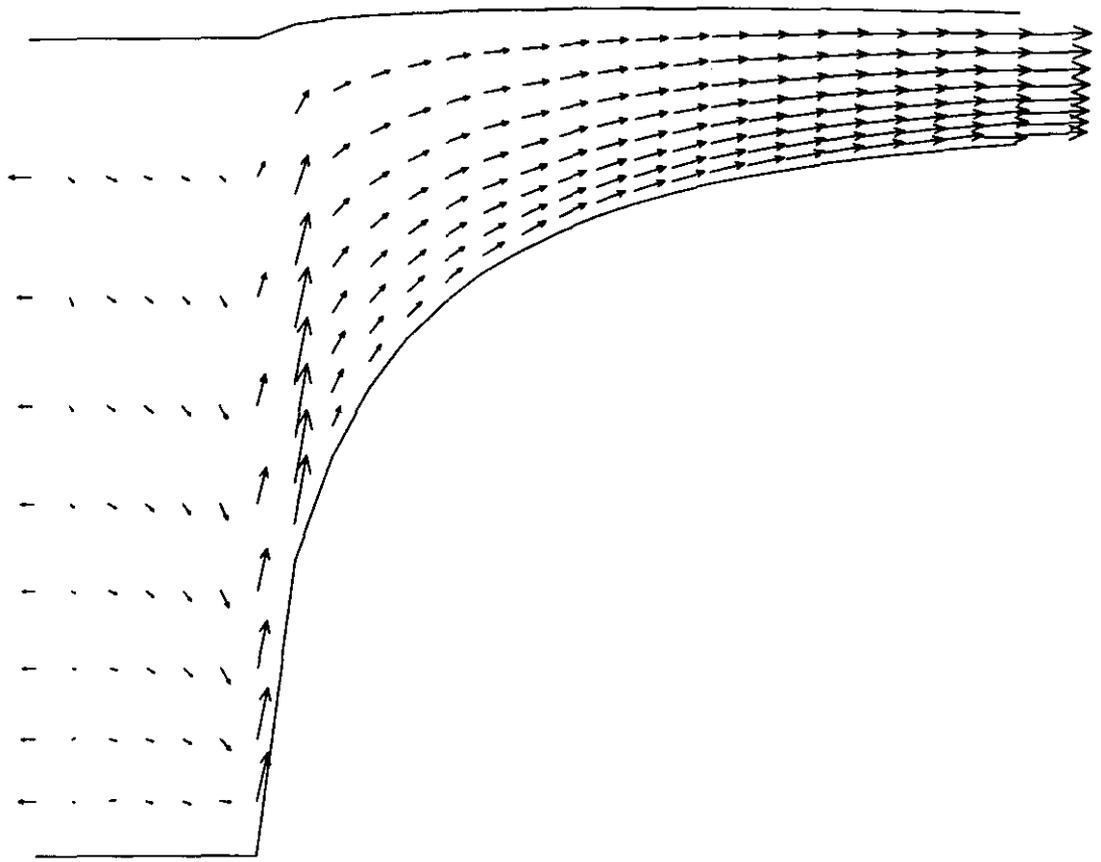


Fig. 3.2 Corte transversal del cálculo con topografía gruesa, usando coeficiente  $q$  de Guo igual a cero

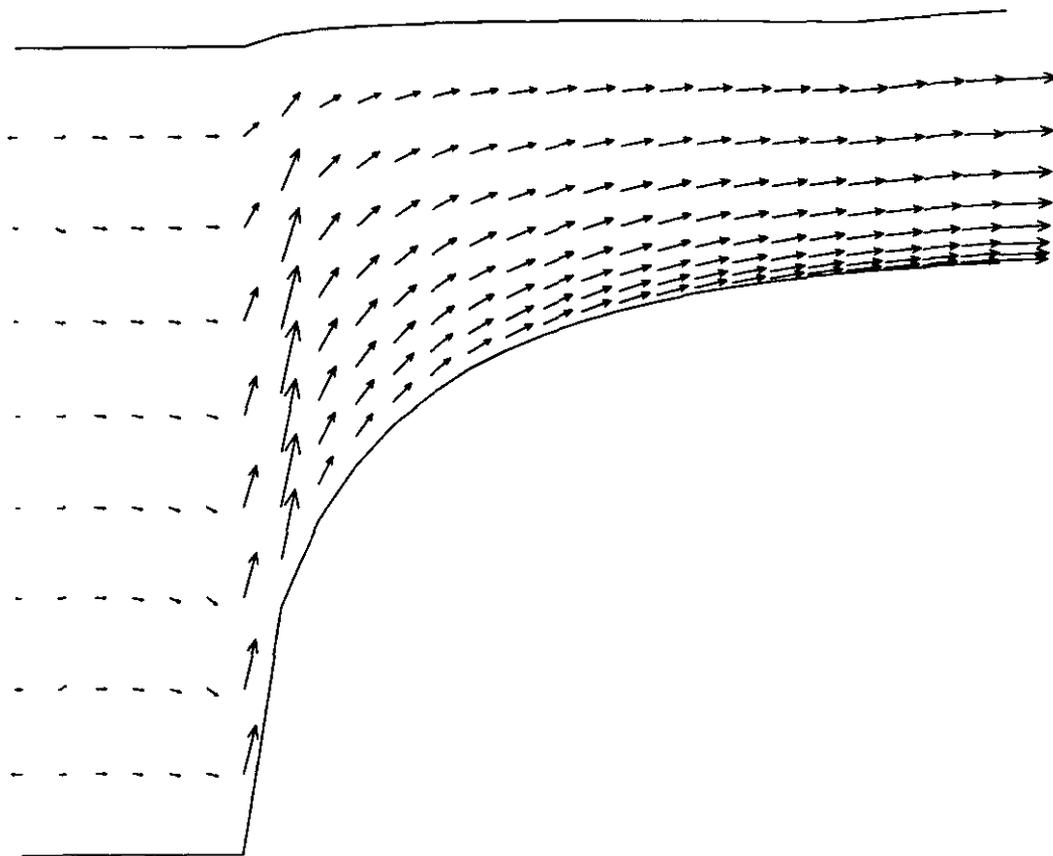


Fig. 3.3 Corte transversal del cálculo con topografía gruesa, usando coeficiente  $q$  de Guo igual a uno

Otro aspecto a señalar es la validez del cálculo cerca de la frontera de entrada. A los efectos, se remite al lector al siguiente ejemplo.

b) Rampa

Este caso, extremadamente sencillo, está ilustrando las mejoras obtenidas al refinar la grilla, y las zonas de validez de los resultados. Se ha definido como tal a un escurrimiento con techo plano horizontal y piso también plano, pero inclinado, de forma que la sección de pasaje disminuye uniformemente. Ello obliga a que inversamente varíe la velocidad; la solución es que las componentes varían linealmente con la abscisa.

Las estaciones dato tienen el mismo registro; por ello el campo inicial  $(u_0, v_0)$  es uniforme.

En la fig. 3.4 se observa el perfil del potencial de velocidad, que en este caso debiera ajustarse con una parábola; la corrección calculada por el programa al campo de velocidad inicial; la velocidad resultante y la divergencia remanente, todo ello vs. el índice de los puntos de integración. Por tratarse de la topografía gruesa, el índice varía de 1 a 20.

Se debe hacer notar que la corrección de velocidad cambia de signo en el dominio; ello implica que, a la izquierda del mismo, la velocidad es menor, y a la derecha es mayor, lo cual es correcto. Sin embargo, si la estación dato fuese única, y estuviese en el extremo izquierdo, la velocidad calculada sería menor que la medida; y si estuviese a la derecha, sería mayor. El coeficiente  $c$  de Guo, definido en la ec. 2.16, apunta a remediar esta situación. Otro aspecto a señalar es el andamio de la divergencia remanente. Lo representado es el flujo neto no balanceado en cada elemento de la quinta fila. Ese desbalance es mucho mayor en el borde, por lo que debe evitarse utilizar los elementos frontera en la interpretación de los cálculos.

La fig. 3.5, tiene los mismos resultados, pero con una grilla con la mitad de paso; las abscisas varían, pues, entre 1 y 40.

Obsérvese que hay un efecto importante en la forma de la parábola; ella ahora es más regular y simétrica, aunque aún el mínimo no está centrado. Las correcciones a la velocidad son lineales en la zona interior, pero en los bordes ello no se mantiene. Ello es debido a que la condición de borde obliga a que la velocidad inicial+corrección sea horizontal, lo que no es correcto en este caso. La divergencia remanente máxima disminuye de un valor de  $15 \cdot 10^{-3}$  a  $6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{m}^3$  aproximadamente; esa disminución es mayor que la que se observa en las zonas centrales, donde pasa de  $10^{-3}$  a la mitad, aproximadamente.

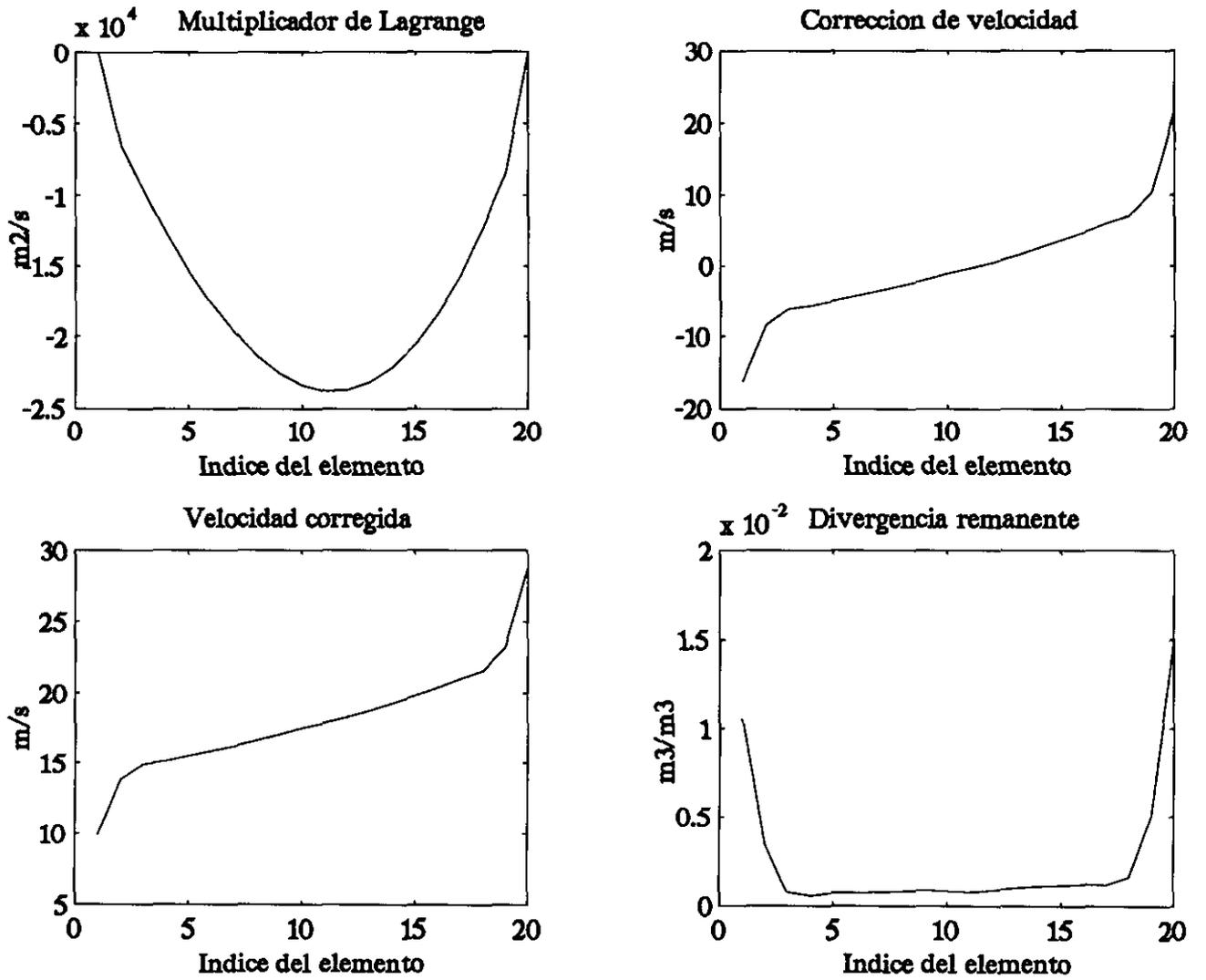


Fig. 3.4 Resultados del cálculo para la rampa, con la topografía gruesa.

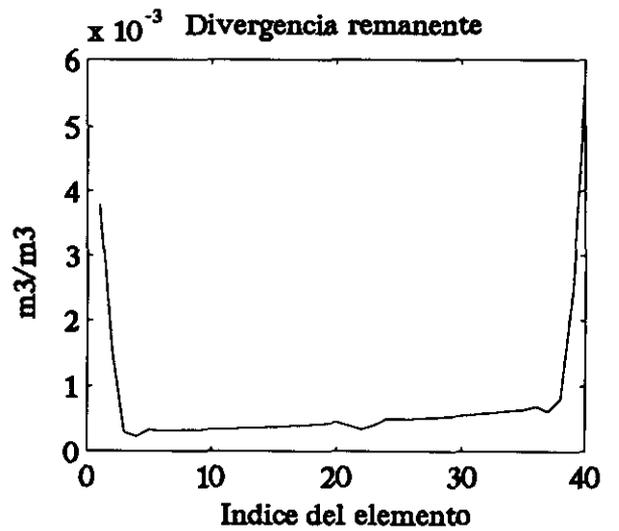
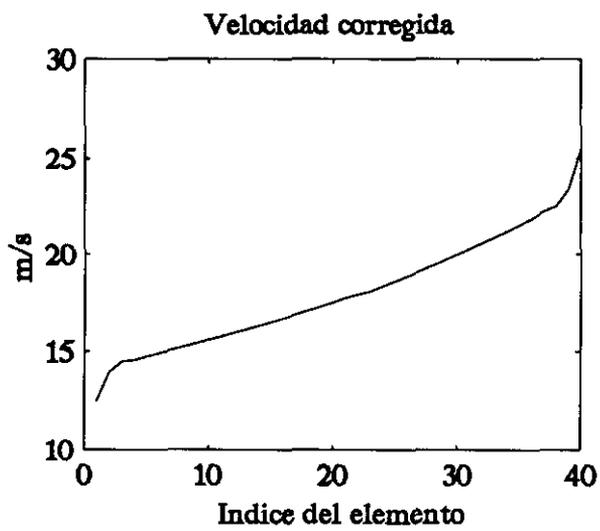
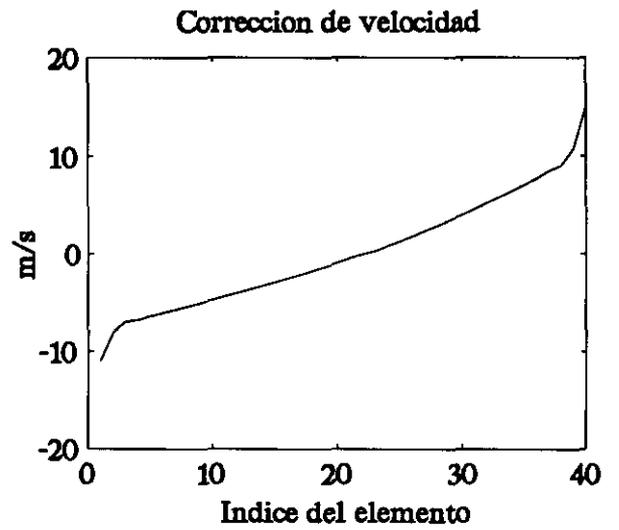
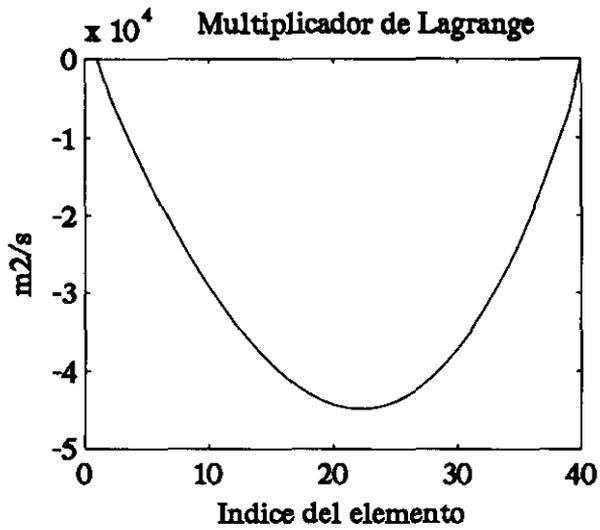


Fig. 3.5 Resultados del cálculo para la rampa, con la topografía fina.

En la figura 3.6 se presenta un corte al campo de velocidades obtenido: obsérvese la deformación en las zonas próximas a la frontera. Debe recordarse que el campo inicial tiene componente horizontal uniforme, pero que la componente vertical es calculada con objeto de hacer al piso y techo del dominio superficies de corriente (impermeables), lo que explica que la velocidad en las fronteras abiertas no sea horizontal.

d) Fuente y sumidero en una corriente (M.T., pp. 199)

El potencial de velocidad, y la velocidad responden ahora a:

$$W = u_0 z - m \log(z-a) + m \log(z+a) \quad (3.3)$$

$$\frac{dW}{dz} = u_0 - \frac{m}{z-a} + \frac{m}{z+a} \quad (3.4)$$

En este caso, hay dos puntos de estancamiento, simétricos respecto al eje imaginario. La superficie de corriente que pasa por ellos verifica

$$x^2 + h^2 - a^2 = \frac{2ah}{\operatorname{tg}(Uh/m)} \quad (3.5)$$

Esta superficie es acotada y simétrica tanto respecto al eje real como al imaginario. Se la ilustra en la figura 3.7

Los resultados muestran un ajuste razonable, como puede verse en la tabla 3.3, en los dos últimos renglones. Debe tenerse presente, al evaluar los resultados, lo realmente escaso de la información efectivamente suministrada al modelo.

Valores exactos de u y w para:					
		x=-500 m		x=-2500 m	
Ha (m)	k	u(m/s)	w(m/s)	u(m/s)	w(m/s)
		17.347	3.551	4.286	0.061
1500	0.05	15.419	6.281	5.607	0.004
1500	0.50	16.547	6.770	7.946	0.005
1300	0.50	16.495	6.740	7.385	0.005
1300	0.15	15.340	6.249	4.672	0.001
1500	0.15	17.786	6.437	5.536	0.005

Tabla 3.3 Valores obtenidos para el ajuste del estudio de la fuente puntual en una corriente uniforme. Caso bidimensional.

En la figura 3.8 se presenta el campo de velocidades obtenido.

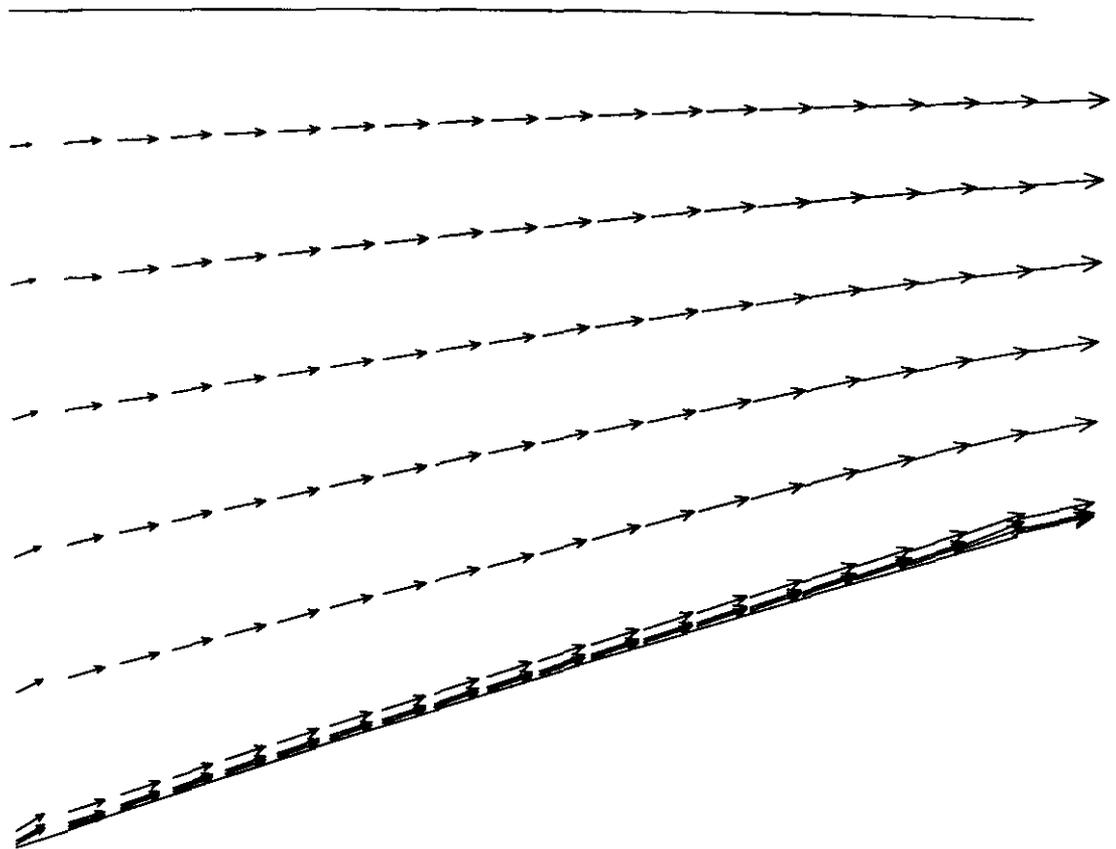


Fig. 3.6 Campo de velocidades para la rampa, obtenido con la topografía gruesa.

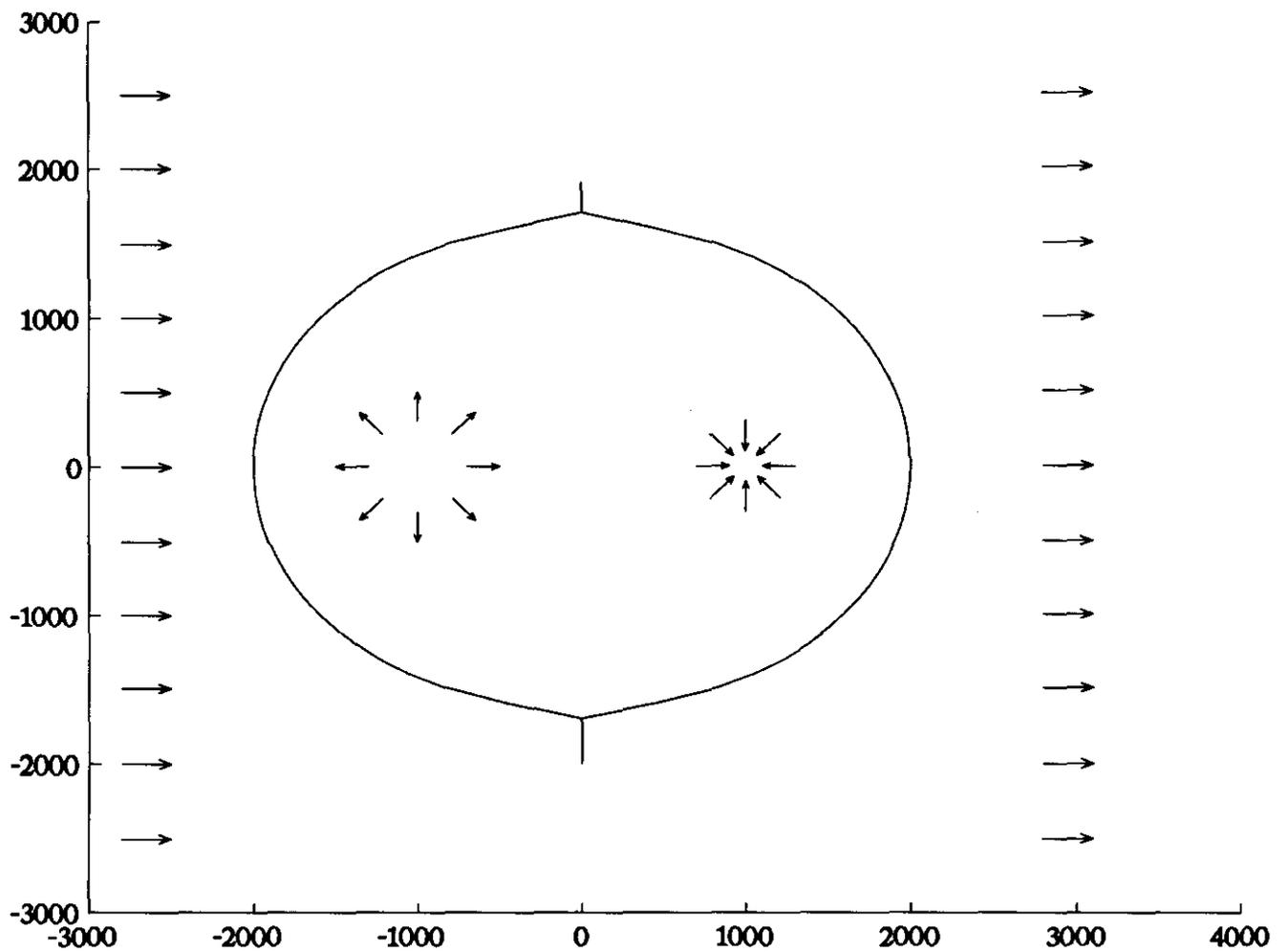


Fig. 3.7 Fuente y sumidero en una corriente uniforme. Se utiliza sólo la mitad superior como topografía.

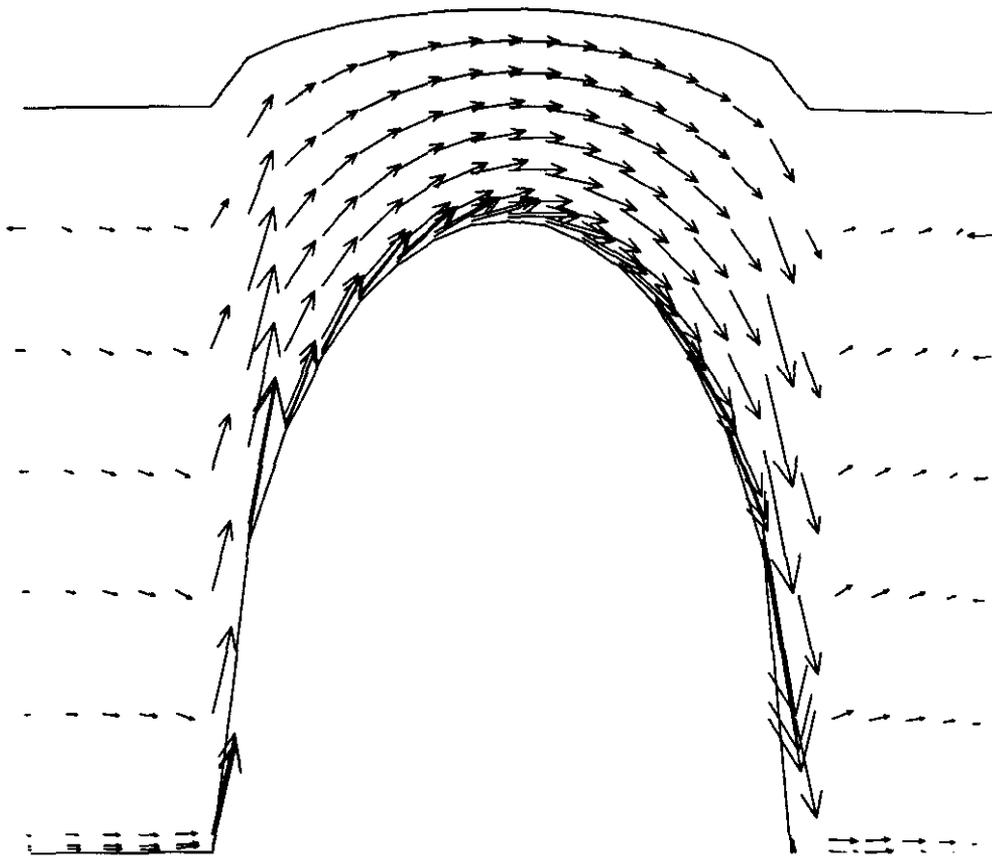


Fig. 3.8 Campo de velocidades obtenido. Obsérvese lo irregular que resulta el campo en las fronteras abiertas

### 3.1.2. Casos tridimensionales

En este caso ya no es posible hallar un potencial complejo para la velocidad. Se debe recurrir al potencial  $\Phi$ , que está vinculado con la velocidad según  $\vec{V} = -\nabla\Phi$ .

El caso estudiado es nuevamente el de la fuente puntual en una corriente uniforme (M.T., pp. 406). El mismo tiene una superficie de corriente semi-acotada, ilustrada en la fig. 3.9.

La expresión del potencial es ahora:

$$\Phi = -u_0 x + \frac{m}{r} \quad ; \quad -\nabla\Phi = \left( u_0 + \frac{m}{r^2} \sin(\theta) \cos(\varphi) \right) \vec{e}_x + \frac{m}{r^2} \sin(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_y + \frac{m}{r^2} \cos(\theta) \vec{e}_z \quad (3.6)$$

Los resultados se presentan en la tabla 3.4.

		Valores exactos de u y w para:			
		x=0; y=3000 m		x=-1600m; y=4200m	
Ha (m)	k	u(m/s)	w(m/s)	u(m/s)	w(m/s)
		0.000	10.661	-0.160	10.419
6000	0.5	0.004	10.602	-0.432	10.670
4000	0.5	0.004	10.647	-0.499	10.655
4000	0.8	0.049	10.595	-0.477	10.666
4000	0.3	-0.008	10.704	-0.501	10.664

Tabla 3.4 Valores obtenidos para el ajuste del estudio de la fuente puntual en una corriente uniforme. Caso tridimensional.

### 3.2. Escurrecimientos sobre topografías reales

Dado que tales cálculos están basados en medidas en prototipo, las mismas no son repetibles. En particular, ello obliga a considerar previamente lo que se entiende por error o discrepancia entre la predicción y la medida de campo.

El modelo implementado no puede él mismo ser mejor que los datos de partida. Asimismo, la serie medida en prototipo puede estar afectada por un sinnúmero de problemas, algunos de los cuales se expondrán a continuación, que hacen poco confiable una aplicación a ciegas.

Todo ello se considerará en lo que sigue.

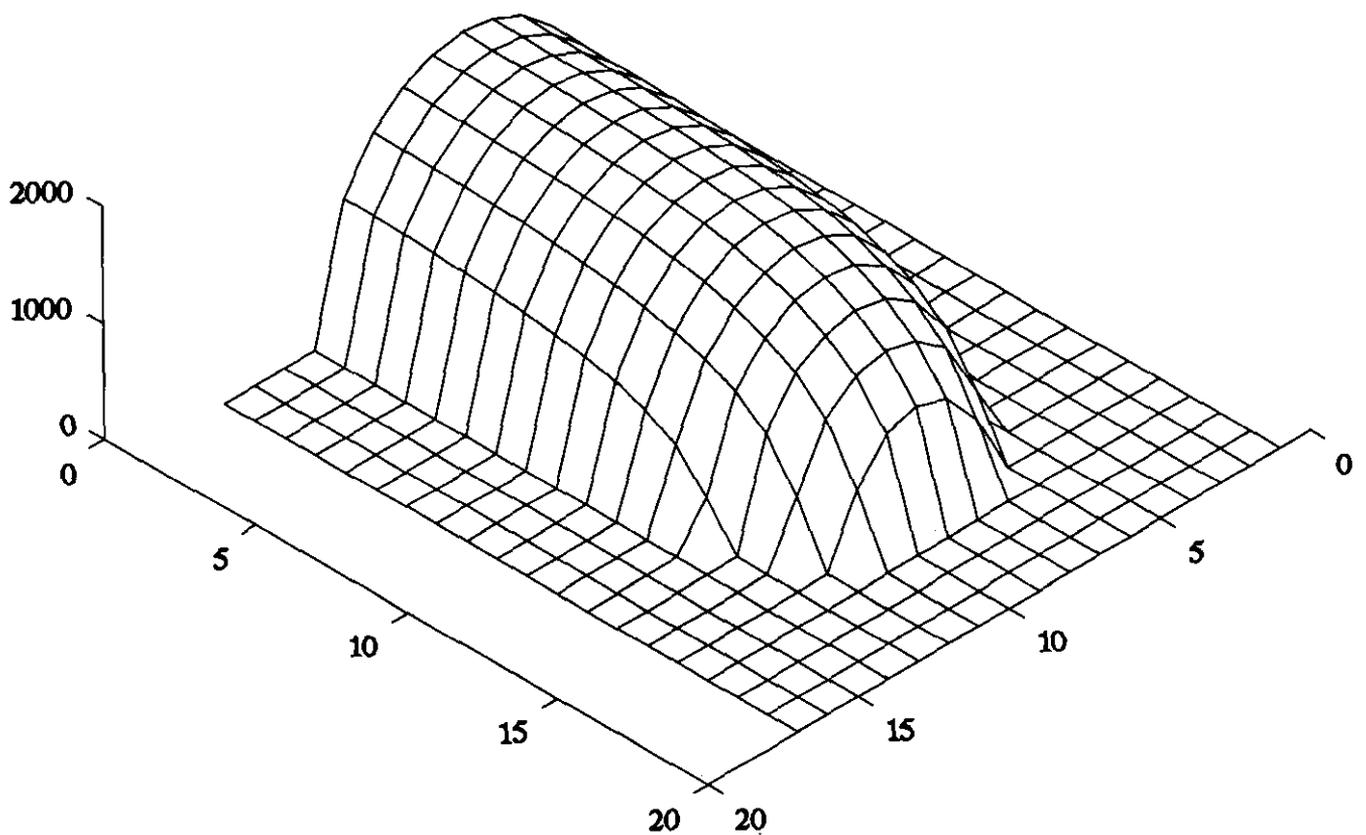


Fig. 3.9 Vista en perspectiva de la topografía tridimensional utilizada para el caso de una fuente puntual en una corriente uniforme. Las abscisas y ordenadas son los índices de la matriz de cotas.

### 3.2.1. Necesidad de una depuración de los datos

De entre todas las posibles fuentes de error en las medidas, tanto en módulo como en dirección, destacaremos las siguientes:

- Errores por inadecuada exposición del anemómetro (López y Acosta, 1989)
- Fallas sistemáticas y aleatorias del instrumento
- Errores aleatorios de lectura del observador
- Errores de transcripción
- Errores de digitación

En el caso de los instrumentos automáticos, como los utilizados en las medidas de la DNE, los últimos tres deben excluirse, pero como se ilustrará, las fallas del instrumento pasan a ser relativamente más importantes.

Como parte del trabajo de Briozzo et al., 1993, se realizó una depuración sistemática de los datos provenientes de la DNM. Dado que se trata de registros históricos, los únicos errores demostrables son los de digitación. Ellos son fácilmente corregibles, y están documentados; si un operador en cambio, anota un registro sin observar el instrumento, no es posible demostrar ese error. Se depuró un conjunto de cinco estaciones meteorológicas, a saber Punta del Este, Carrasco, Melo, Treinta y Tres y Paso de los Toros, para los años 1984, 1990 y 1991.

El método aplicado se reveló muy eficiente, y detalles pueden encontrarse en la referencia citada.

Distinto fue el caso con los datos provenientes de estaciones automáticas, ya que no hay registro escrito contra el que comparar. Sin embargo, se logró detectar algunas deficiencias de diseño en el instrumento, como ser que: a) Si por algún motivo no podía adquirir el dato, el registro guardado era el cero. b) En caso de bajar el nivel de energía de la batería, la señal guardada es completamente disparatada (ver registro de la estación denominada Cordillera, en la tabla 3.5)

90111502NNE	15	
90111503NNE	6	
90111504	E 12	
90111505	SE 16	
90111506	N 17	
90111507	E 16	
90111508ESE	35	
90111509NNE	26	
90111510	N 16	
90111511	NE 10	
90111512	E216	<== Obsérvese el salto abrupto, y luego
90111513	SE154	<== la caída a cero, cuando se termina de
90111514	0	agotar la batería
90111515	0	
90111516	0	
90111517	0	
90111518	0	
90111519	0	
90111520	0	
90111521	0	
90111522	0	

Tabla 3.5 Fragmento de las lecturas de la estación automática de Cordillera. Las últimas tres cifras indican el módulo de la velocidad en km/h

Ambas circunstancias obligaron a que todas las calmas debieran ser consideradas como ausencia de dato, al ser imposible distinguir las unas de las otras. Ello hará que, inevitablemente, la velocidad media así calculada sea superior a la que corresponde.

Por otra parte, registros como el mencionado provocan efectos negativos en los patrones. Véase la fig. 3.10, en el cual se incluyó la estación mencionada, junto con otras de la DNE y las cinco depuradas de la DNM. La velocidad media registrada en Cordillera es casi exactamente opuesta a lo que es razonable esperar. Al interpolar, el modelo tratará de aproximar ese valor en zonas próximas, por lo que disminuirá el registro casi constante que resulta del uso de los datos del resto de las estaciones, y también disminuirá el peso de la estación errónea. Debe destacarse que esta situación fue debida únicamente a dos registros disparatados, y no a un error sistemático.

Una vez corregido este par de registros, se observa en la fig. 3.11 que la velocidad media es ahora más razonable. Una medida objetiva de lo razonable de un campo podría estar dada por la divergencia máxima (en valor absoluto) obtenida al interpolar los datos.

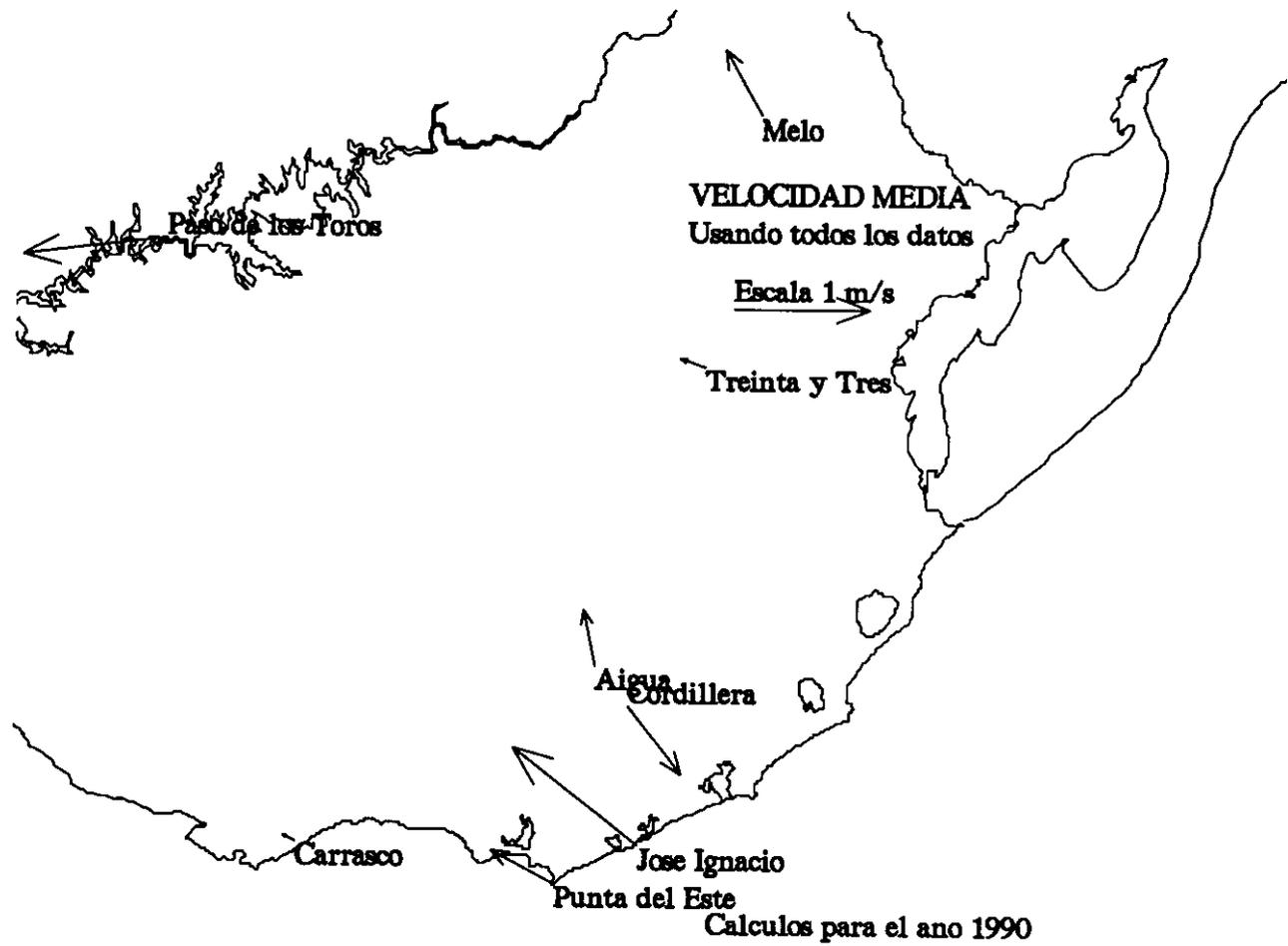


Fig. 3).10 Efecto de un par de datos disparatados en el campo de velocidad media

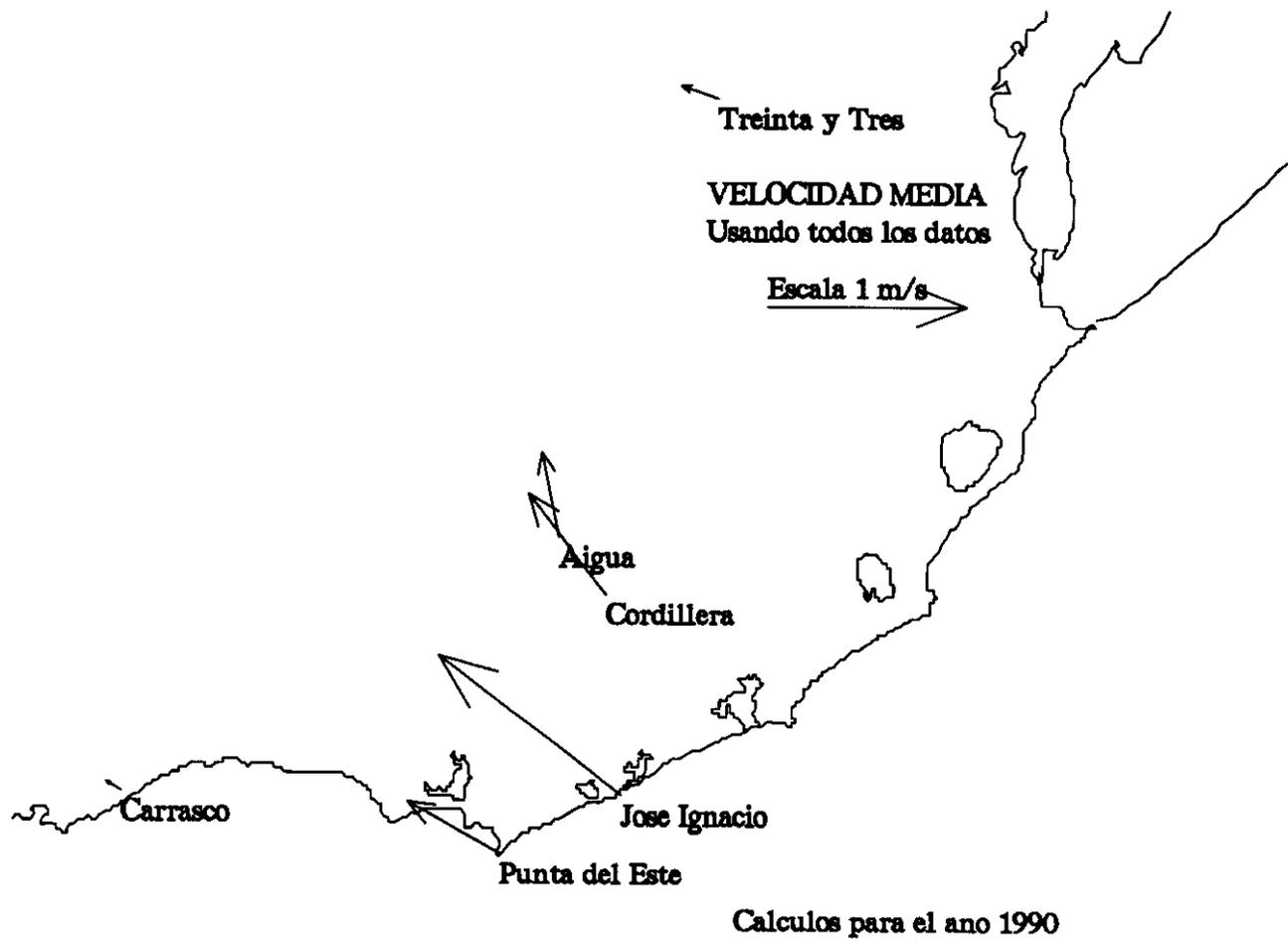


Fig. 3.11 Idem anterior, pero removiendo los dos datos sospechosos

Para el caso de la velocidad media, se debe normalizar el valor calculado con la norma L2 del vector de dimensión  $2 \times 1$ . En los demás patrones, esa norma es automáticamente unitaria.

En la fig. 2.12, se ilustra la evolución de tal índice según el patrón considerado.

Este efecto nocivo de un quizá pequeño número de datos no es privativo del campo de velocidades medias. No se ha hecho aquí, pero en trabajos anteriores (Silveira et al., 1991) se pudo ver que los errores grandes afectan al campo medio y a los patrones de índice más bajo, pero que al depurarlos, los errores más pequeños se van manifestando progresivamente en los patrones de índice mayor, sin afectar prácticamente a los otros.

El ejemplo de la velocidad media es, sin embargo, ilustrativo del problema: si los patrones no son depurados, el modelo generará a partir de un ellos un campo que subvalorará equitativamente todos los registros, con objeto de satisfacer la condición de discrepancia mínima (ec. 1.3). Ello explica en parte los resultados obtenidos al calibrar, como se expondrá más adelante.

#### 4. RESULTADOS OBTENIDOS

##### 4.1. Comparacion con medidas de campo existentes

Se ha optado por utilizar como testigos, los datos de algunas de las estaciones automáticas de la DNE, que han recogido registros horarios durante el período 1990-1991, y algunas estaciones de la DNM no utilizadas para la interpolación; se ha tomado como datos de partida los de la DNM del año correspondiente.

De entre las estaciones mencionadas como testigos hay dos grupos: aquellas que serán utilizadas en la etapa de calibración, y las que serán comparadas sin recorrer los resultados.

De entre las primeras, tres de ellas están en zonas de relieve muy suave (Aiguá, Solís y Rocha); la otra fue a su vez modelada en túnel de viento (Cisa et al., 1990 y Briozzo et al., 1993) obteniéndose por esa vía valores de velocidad relativa (*speedup factor*). Tales factores son el cociente del módulo de la velocidad registrada en un punto de referencia en el túnel, ubicado en zona plana en el prototipo, con las velocidades correspondientes dentro de la topografía compleja.

Esa zona plana se asume que es suficientemente próxima a la zona modelada; los resultados del modelo numérico se supone que están referidos a esa zona, y los valores a comparar con las

medidas son el resultado de afectar por el *speedup factor* las predicciones del modelo numérico.

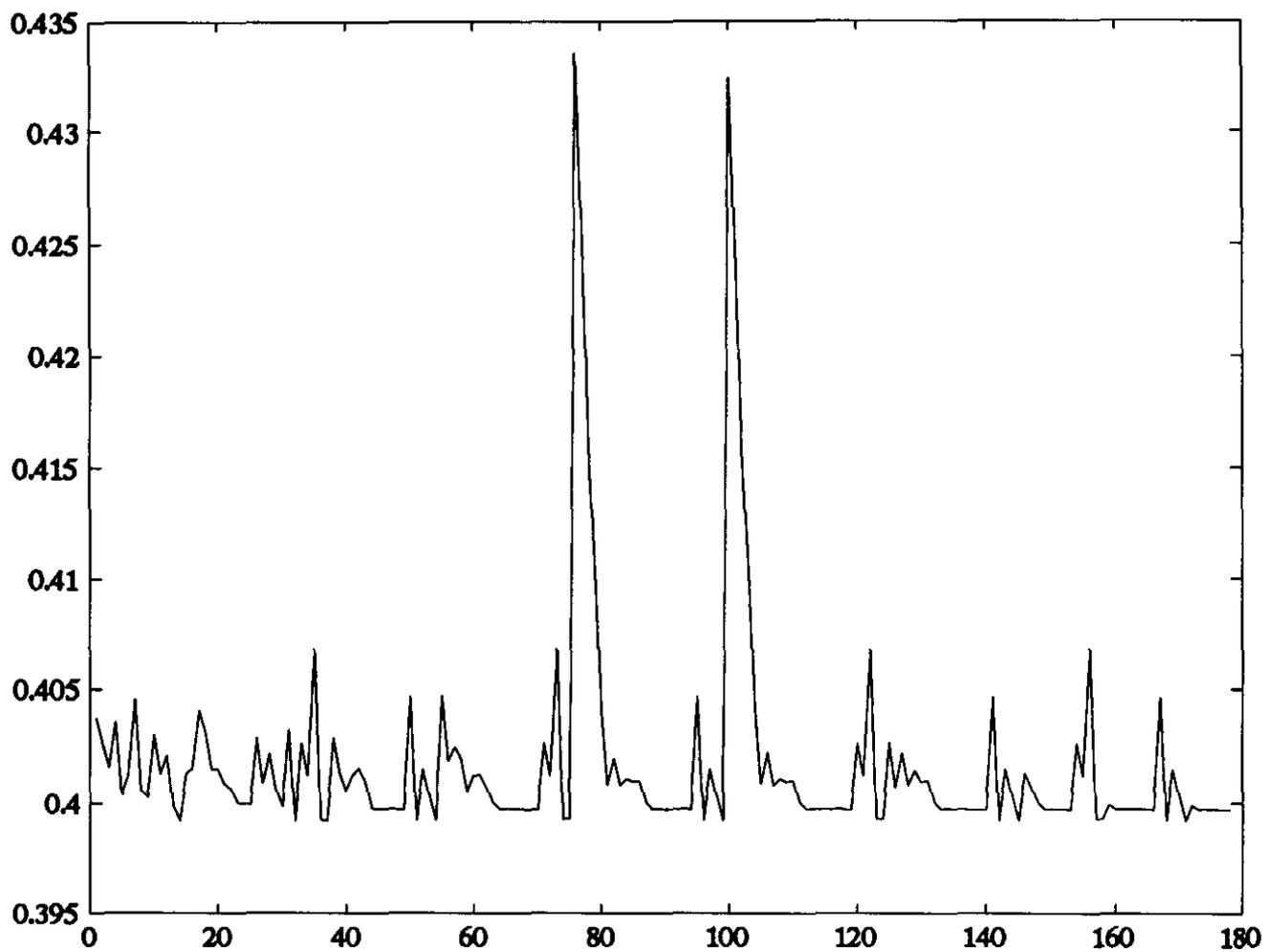
Ello hace que, usados en conjunto, el trabajo de esta tesis y la medida en túnel conformen un modelo encajonado con diferentes escalas de resolución. No se ha encontrado en la literatura una combinación como la precedentemente propuesta.

Los registros en túnel son, por otra parte, dependientes del ángulo de incidencia del viento. Por las características geométricas del modelo físico, sólo algunas direcciones fueron en general medidas. Sobre las demás no se cuenta con información del aumento de velocidad, por lo que se la estimó conservadoramente en 1.0. Ello nuevamente hace conservadoras las predicciones frente a las medidas.

Dado que el tiempo requerido para calibrar el modelo varía fuertemente con el número de elementos utilizados en el cálculo, se decidió calibrar con una grilla relativamente gruesa, y luego de obtenidos los parámetros óptimos para ella, calcular sin optimizar el campo de velocidades usando un mayor número de elementos. El cálculo se basó en una grilla de aproximadamente 60 km de lado, y la evolución del estimador de error se ilustra en la fig. 4.1. En las abscisas, se indica el avance de la calibración; en las ordenadas, se despliega el estimador del ajuste, con dimensiones m/s. El algoritmo encontró un mínimo (quizá local) para  $k=0.9548$ ;  $\alpha_1/\alpha_2 = 0.1123$ ;  $\beta=0.077$ ;  $H_a=1220$  m y  $q=0.6736$ . No se distinguió entre registros diurnos y nocturnos, ni tampoco se tuvo en cuenta factores estacionales. En el caso de estos últimos, lo escaso del período disponible para comparar inhibe de más comentarios. El ciclo diurno y nocturno es posible de ser calibrado por separado, pero en el trabajo de Cisa et al., 1990 cualitativamente los patrones calculados para el día diferían realmente poco de los de la noche, excepto para la estación de Carrasco (aeropuerto a 5 km de la costa). Por ello también se desestimó la calibración por separado.

El modelo topológico de cálculo utilizado en la calibración tiene 9 elementos tanto en la dirección x, como y como z. En general, se mantuvo en 9 los elementos en la vertical a lo largo de todo el trabajo.

Las limitaciones de la capacidad de los equipos utilizados (Sun Workstation Sparc I+, 24 Mb. Ram y DEC Station 5000/133, 32 Mb. de Ram) hicieron imposible superar la barrera de los 19 x 19 elementos según x e y.



**Fig. 4.1** Evolución del estimador de ajuste a lo largo del proceso de calibración automática.

#### 4.1.1. Campos de velocidad obtenidos

A los efectos de ilustrar el desempeño del algoritmo, se mostrará en las figs. 4.2 a 4.6 los campos de velocidad obtenidos al resolver las ecuaciones utilizando una grilla de 60 km de lado. Las imágenes corresponden a la velocidad media y los patrones 1 al 4, respectivamente. Los parámetros utilizados en el cálculo son los que han sido obtenidos en la calibración.

En las fig. 4.7 a 4.11 se muestran los resultados al utilizar una grilla de 6 km de paso, para los mismos patrones que antes. Nótese lo dificultoso de observar el campo, dado lo pequeño de las escalas. El recuadro ilustra los límites de la topografía fina disponible, que no cubren todo el territorio nacional.

En las fig. 4.12 y 4.13 se presentan resultados obtenidos con una topografía con datos cada 4 km; debido a las limitaciones de capacidad de los equipos (ya señaladas) el dominio debió subdividirse a los efectos del cálculo, y ello está ilustrado en ambas figuras, ya que cada una de ellas muestra parte de la topografía utilizada. Los patrones representados son diferentes a los anteriores.

Al igual que se expuso en Cisa et al., 1990, los primeros patrones son fácilmente interpretables y son consistentes entre diferentes años; allí fueron presentados los patrones calculados para el año 1983 y 1982, no resultando una diferencia significativa interanual. El tercer patrón, asimilable a un vórtice, también aparecía en aquel caso, pero con "centro" en otra zona del país; ello fue debido a que se utilizó un conjunto algo diferente de estaciones.

Este fenómeno, en el cual los patrones (que se supone reflejan cierta física del problema) son sensibles a utilizar o no diferentes estaciones, se denomina inestabilidad de dominio, y puede corregirse realizando una "rotación" de los componentes, previo a su interpretación. Por detalles, se remite al lector a Richman, 1986.

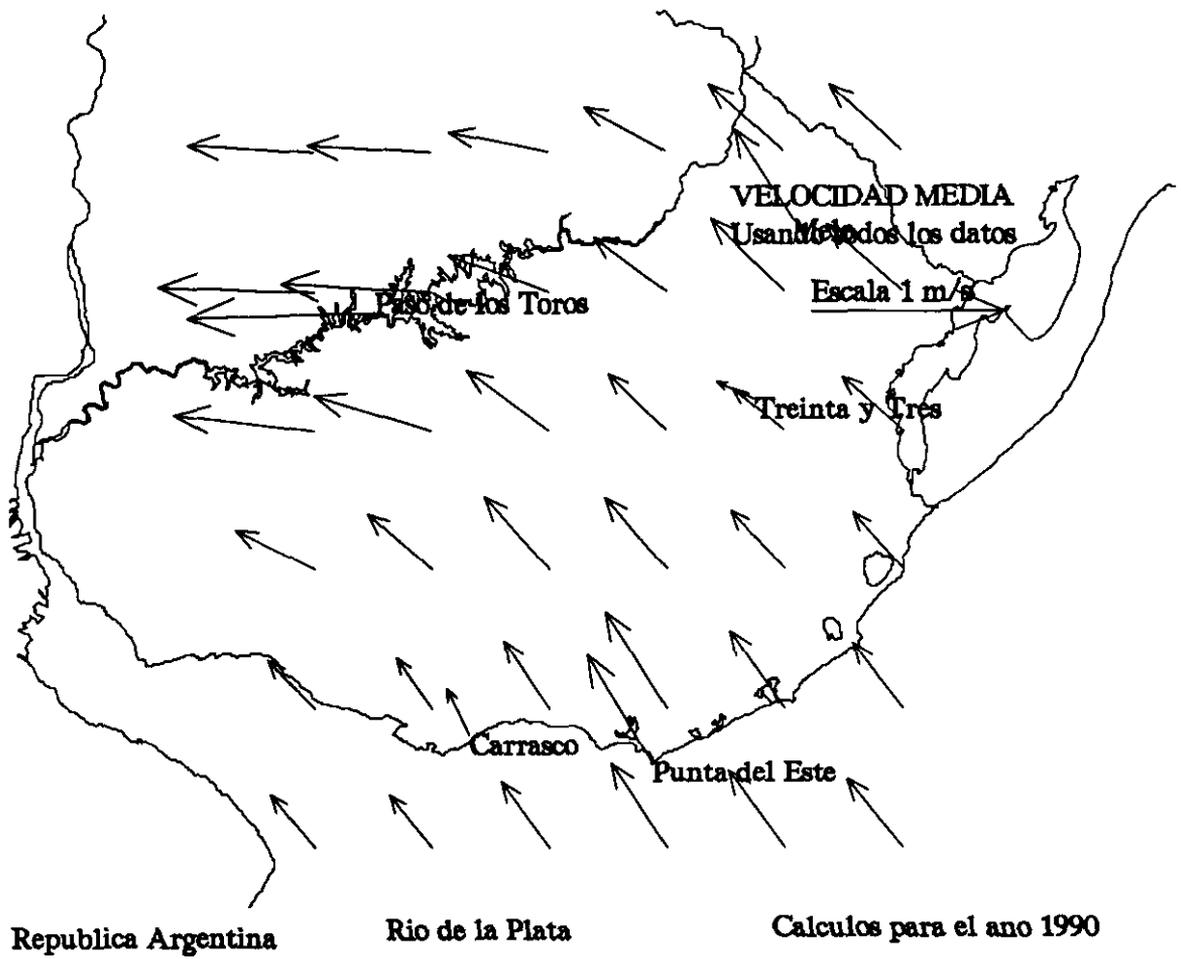


Fig. 4.2 Campo de velocidades interpoladas utilizando una topografía con 60 km de resolución, para el caso de la velocidad media

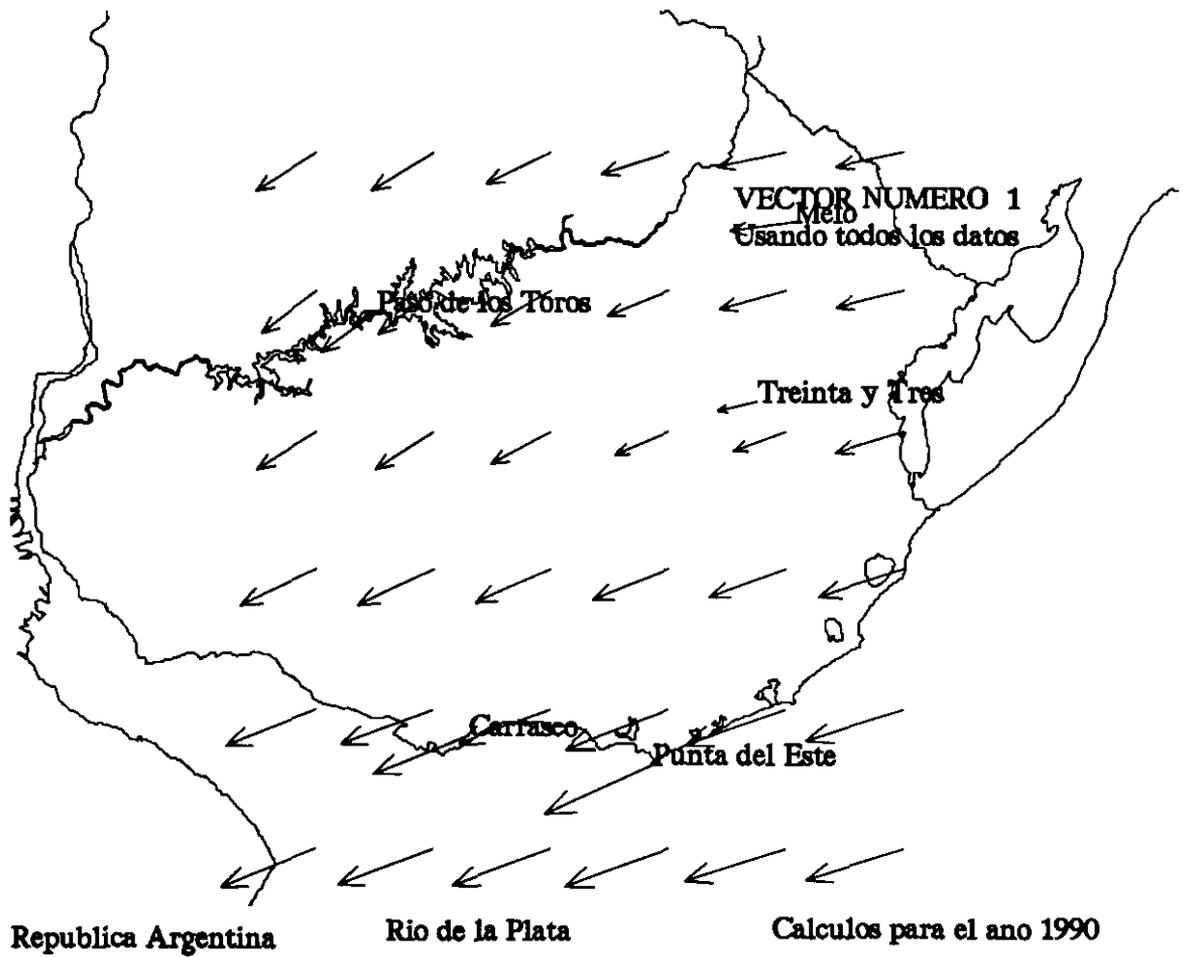


Fig. 4.3 Campo de velocidades interpoladas utilizando una topografía con 60 km de resolución, para el caso del primer componente principal.

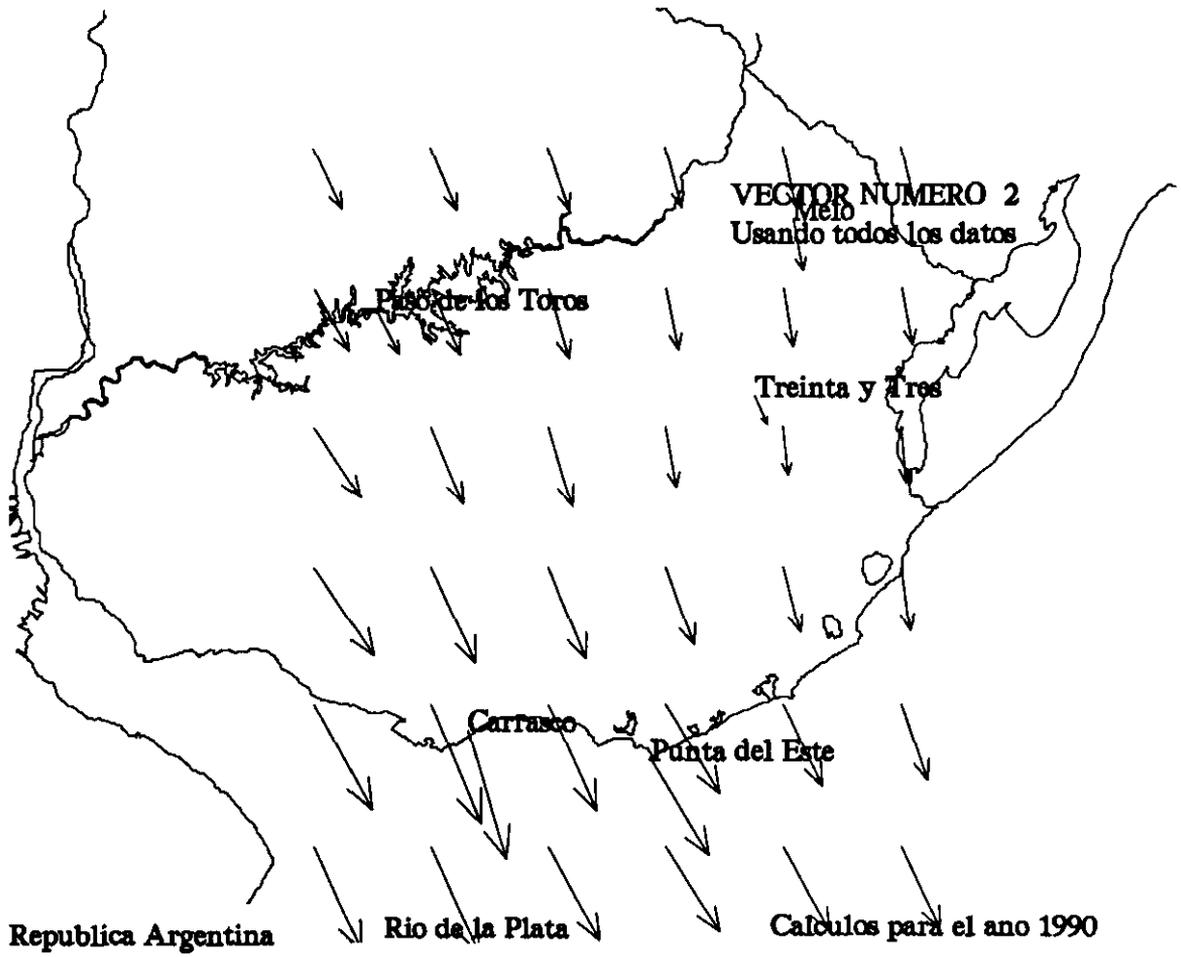


Fig. 4.4 Campo de velocidades interpoladas utilizando una topografía con 60 km de resolución, para el caso del segundo componente principal.

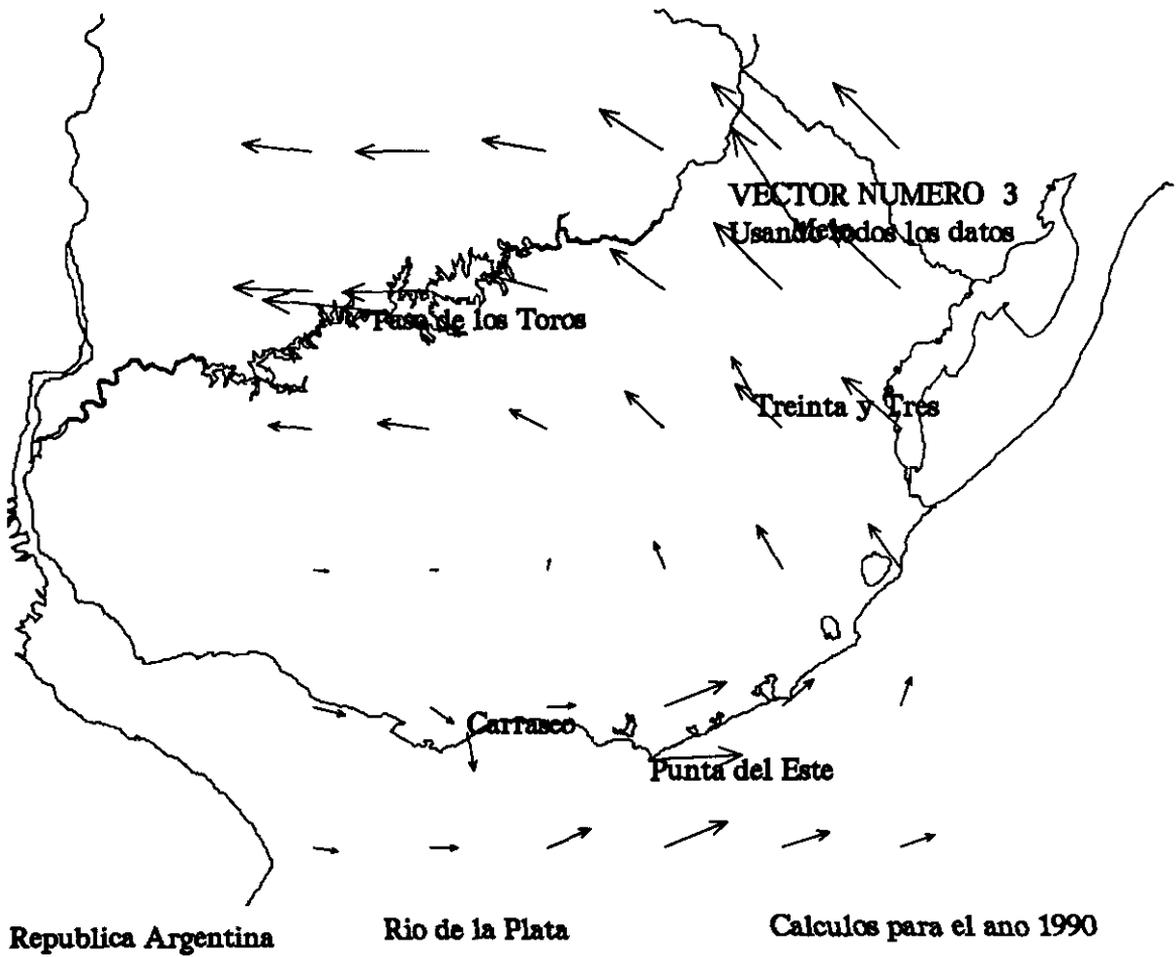


Fig. 4.5 Campo de velocidades interpoladas utilizando una topografía con 60 km de resolución, para el caso del tercer componente principal.

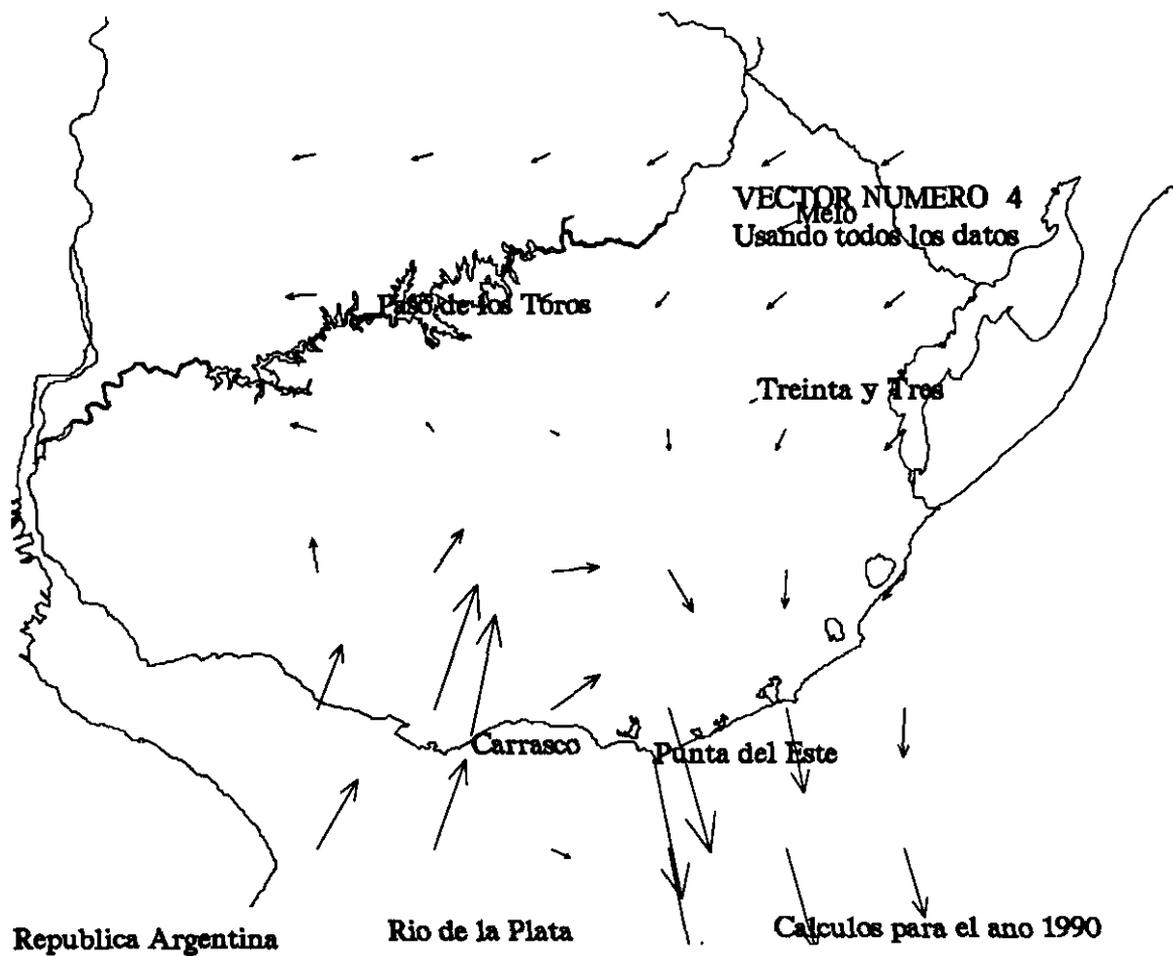


Fig. 4.6 Campo de velocidades interpoladas utilizando una topografía con 60 km de resolución, para el caso del cuarto componente principal.

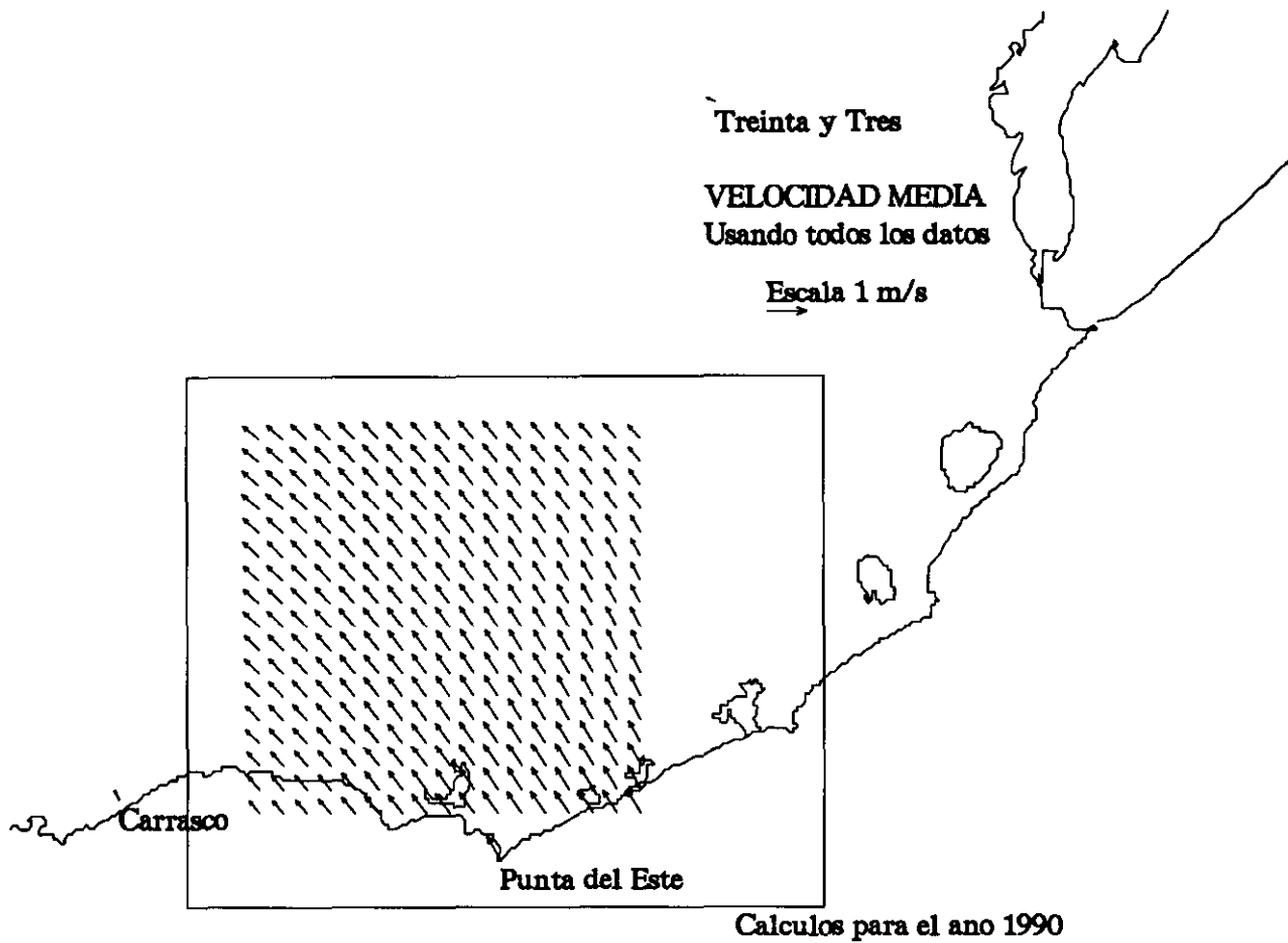


Fig. 4.7 Campo de velocidades interpoladas utilizando una topografía con 6 km de resolución, para el caso de la velocidad media.

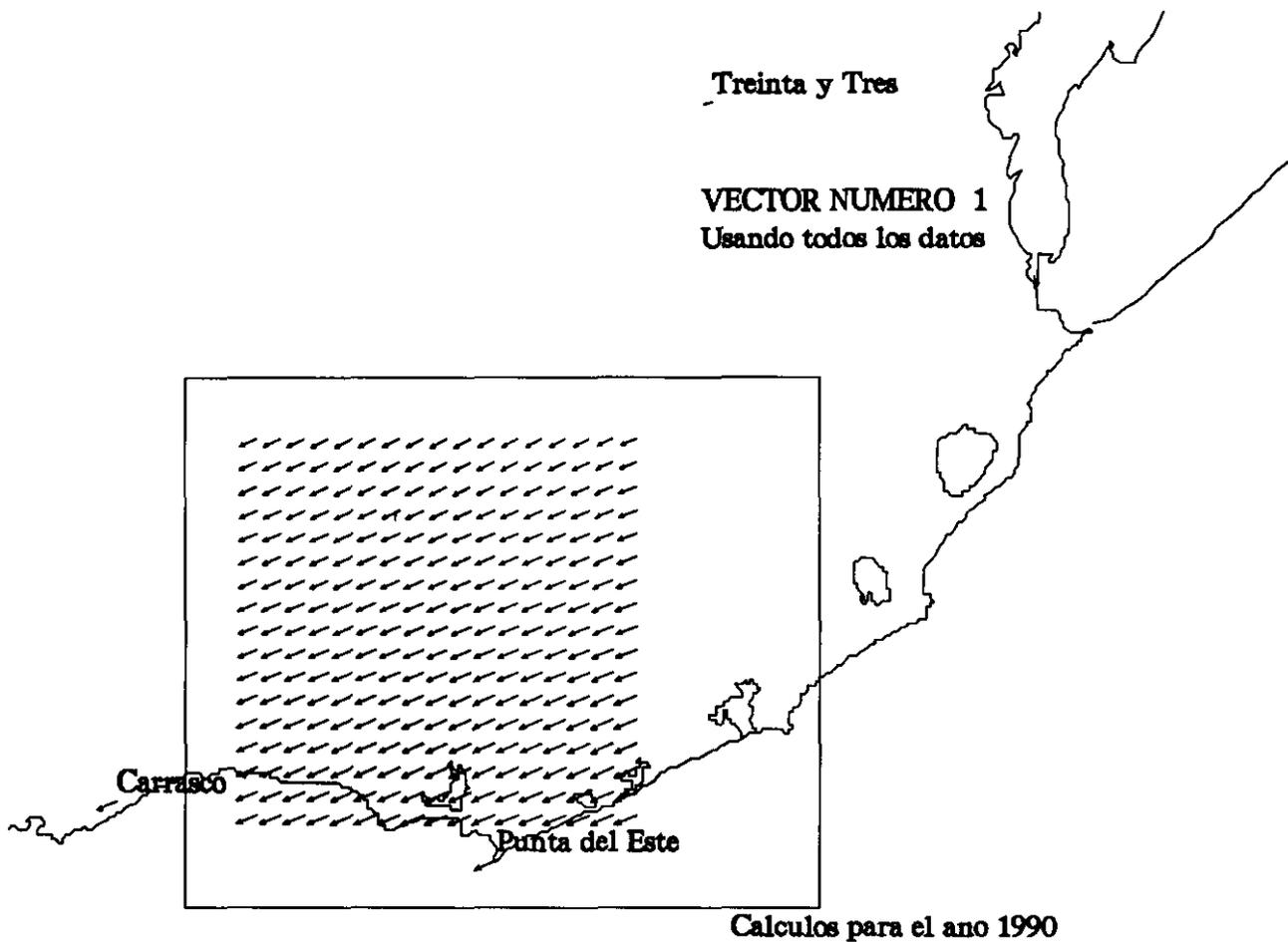


Fig. 4.8 Campo de velocidades interpoladas utilizando una topografía con 6 km de resolución, para el caso del primer componente principal.

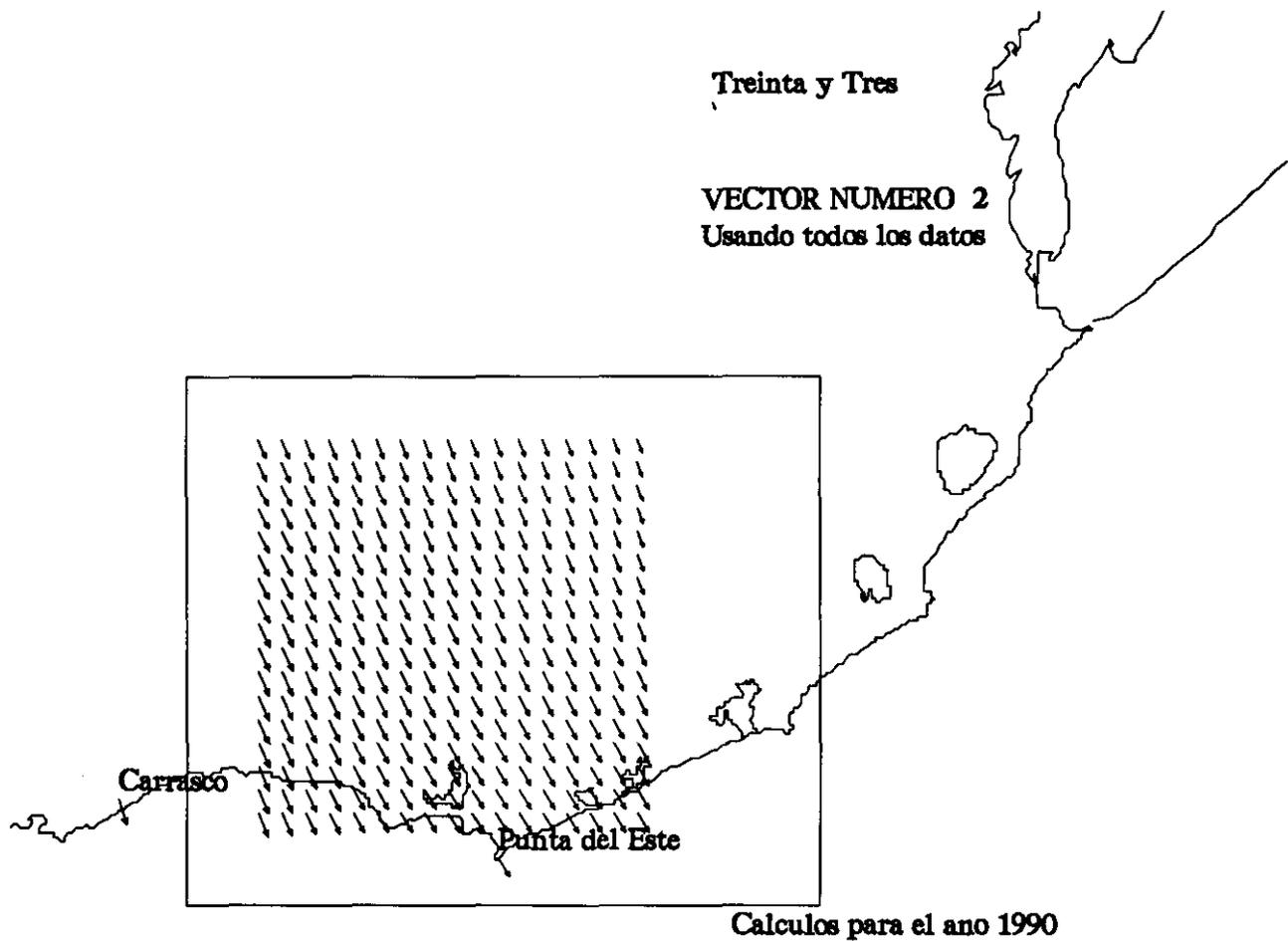


Fig. 4.9 Campo de velocidades interpoladas utilizando una topografía con 6 km de resolución, para el caso del segundo componente principal.

Paso de los Toros

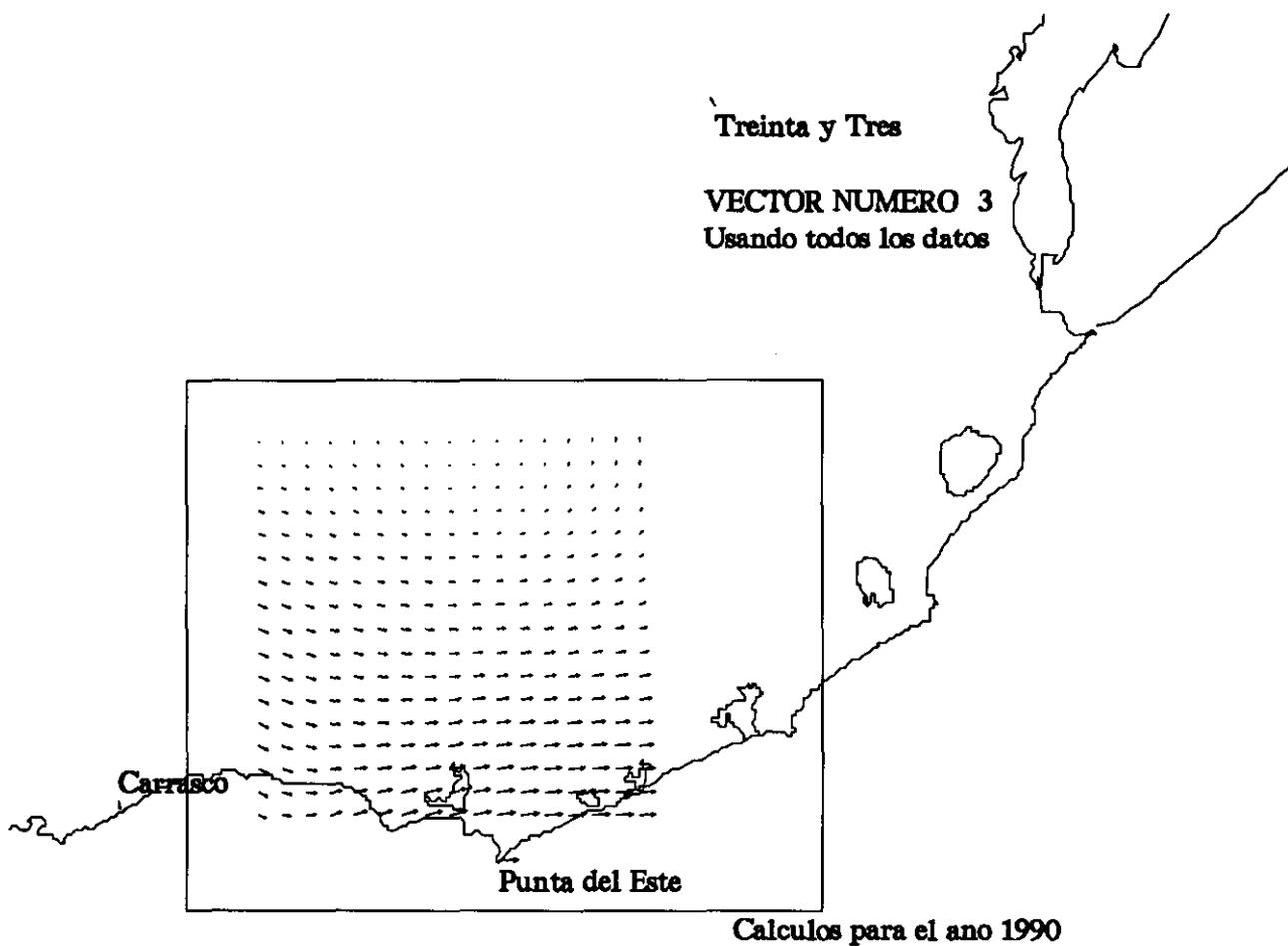


Fig. 4.10 Campo de velocidades interpoladas utilizando una topografía con 6 km de resolución, para el caso del tercer componente principal.

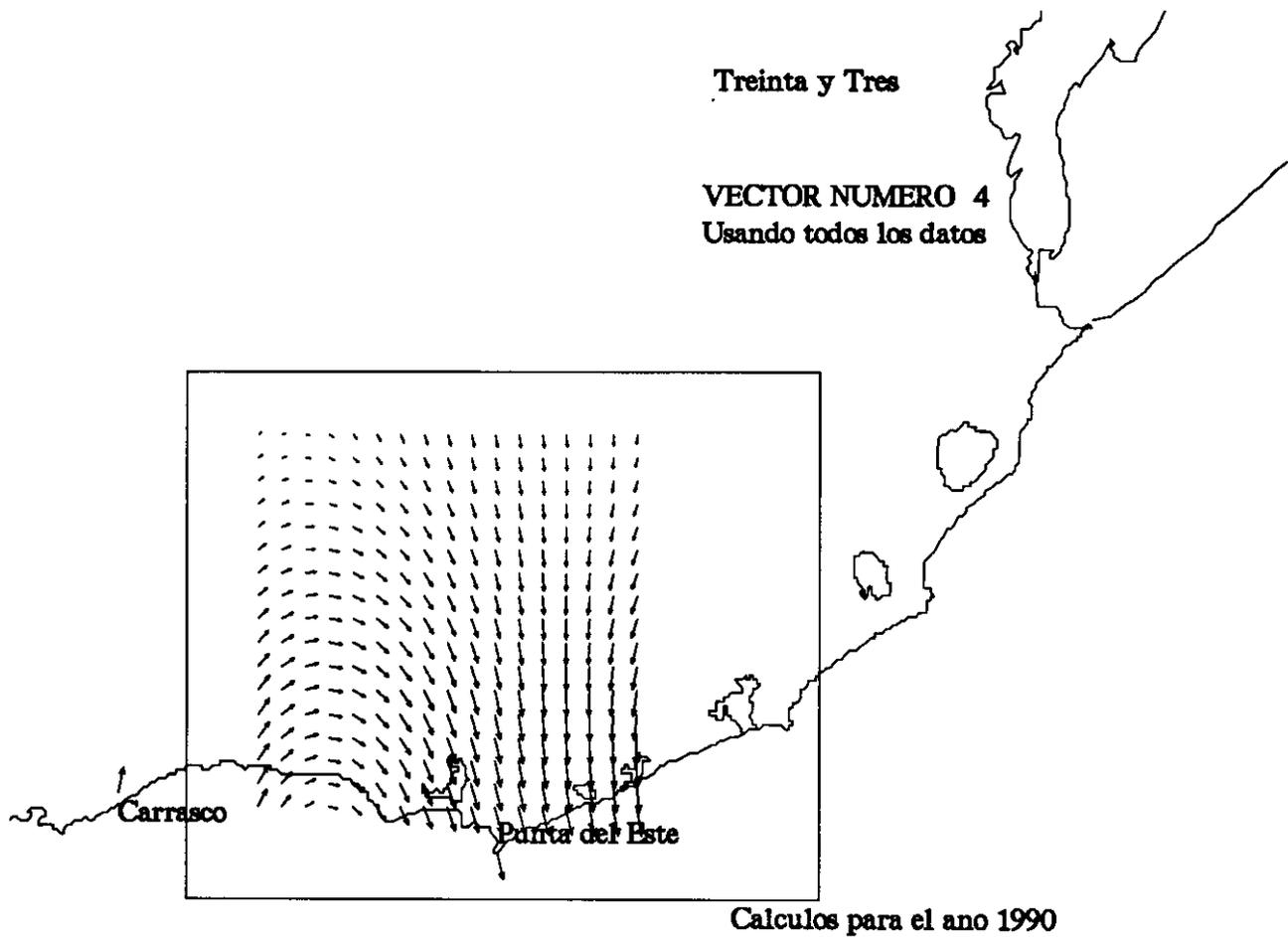


Fig. 4.11 Campo de velocidades interpoladas utilizando una topografía con 6 km de resolución, para el caso del cuarto componente principal.

Paso de los Toros

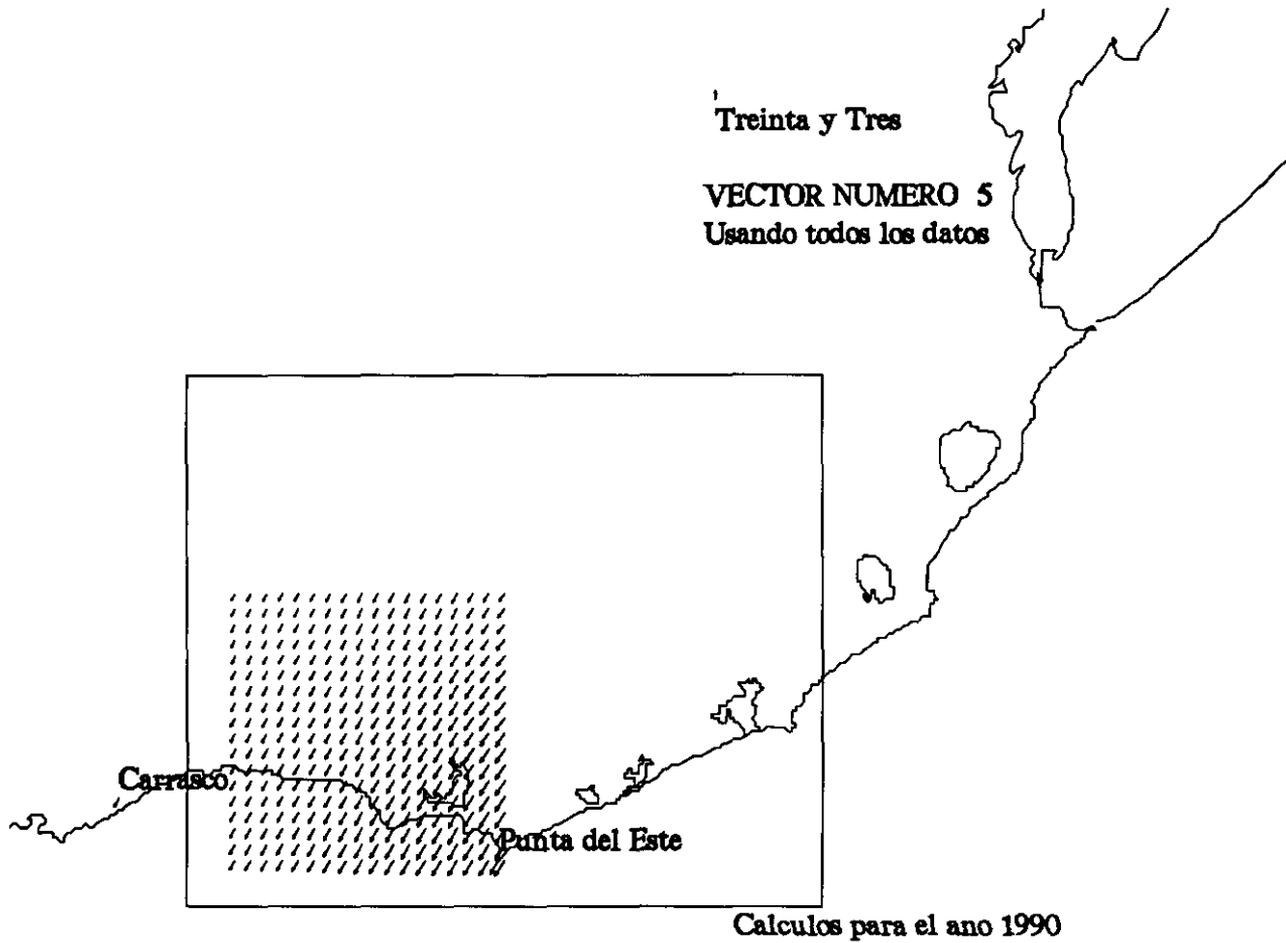


Fig. 4.12 Subdivisión del dominio realizada para poder utilizar una topografía con 4 km de resolución, para el caso del quinto componente principal.

Paso de los Toros

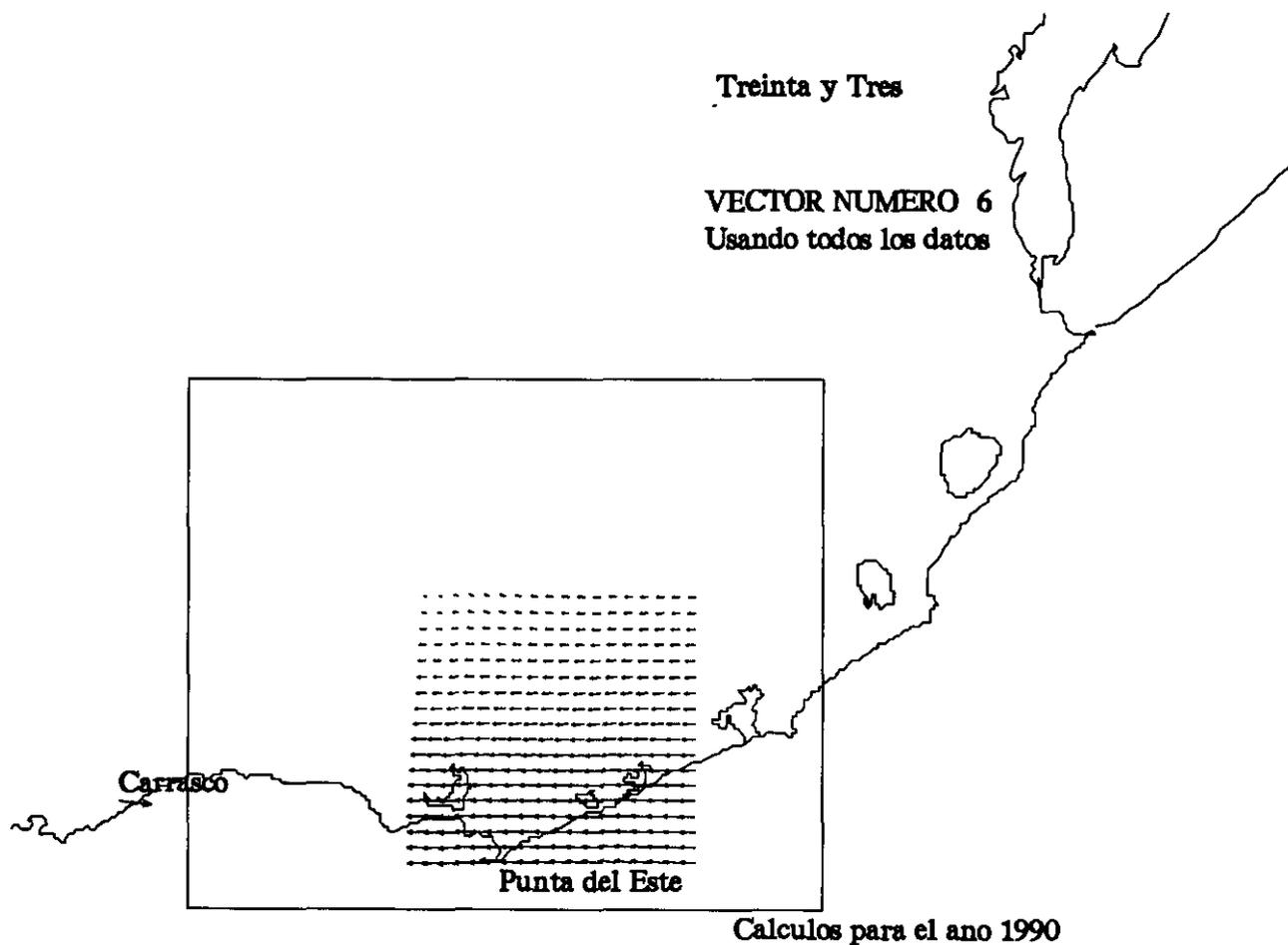


Fig. 4.13 Subdivisión del dominio realizada para poder utilizar una topografía con 4 km de resolución, para el caso del sexto componente principal.

#### 4.1.2 Ajuste de la distribución de velocidad

Se analizarán a continuación los histogramas de velocidad registrados y los calculados. Estrictamente hablando, la población de eventos a comparar no es la misma, ya que como se aprecia en el anexo 3, el período con registros automáticos es relativamente corto, no así el de los cálculos, que se basa en datos de la DNM.

En la fig. 4.14 se observa que, en casi todos los casos, el modelo ubica correctamente la moda de la distribución; no así la ordenada correspondiente, que aparece en todos los casos, subvaluada. También es notorio que en el caso de Cordillera, se sobreestima la frecuencia de velocidades bajas, efecto que ya ha sido justificado.

Las fig. 4.15 a 4.18 muestran la evolución de los histogramas al refinar la grilla. Obsérvese que la forma de los mismos no difiere sustancialmente de las anteriores; en el caso de Aiguá, con la topografía gruesa se obtenía un máximo relativamente agudo, efecto que sólo se repite en el caso correspondiente a la grilla de 6 km de lado (fig. 4.17). Rocha sólo es comparable en las fig. 4.15 y 4.16, porque la topografía más fina disponible lo dejaba afuera. De todos modos, nótese que incluso con un paso de grilla tan grueso como 15 km, el ajuste es razonablemente bueno.

En Solís el cálculo tiende a sobrevaluar levemente las velocidades altas. Tal fenómeno puede ser debido a una inapropiada exposición del instrumento de lectura. De todos modos, esa estación sólo cuenta con 2648 horas comparables.

Con respecto a las estaciones testigo, que no intervinieron en la calibración, se puede decir en general que el ajuste fue bastante bueno, incluso para topografías tan gruesas como las ensayadas.

Entre las estaciones a comparar, dos de ellas fueron ensayadas en el túnel de viento (Cerro del Toro y Caracoles); José Ignacio se encuentra en la costa y Punta del Este fue seleccionada porque participó ella misma del cálculo. Con esto se verá que el modelo tiende a bajar el máximo de la distribución, sin necesariamente mover la moda.

En la fig. 4.19 se presenta el cálculo con la topografía de 60 km de lado. En general, el ajuste para Caracoles es pobre, pero mejora a medida que se refina la grilla. Esta zona es prácticamente una cordillera bidimensional, de una sección transversal algo menor que 1 km, por lo que es razonable que pueda no "verse" en una topografía tan gruesa.

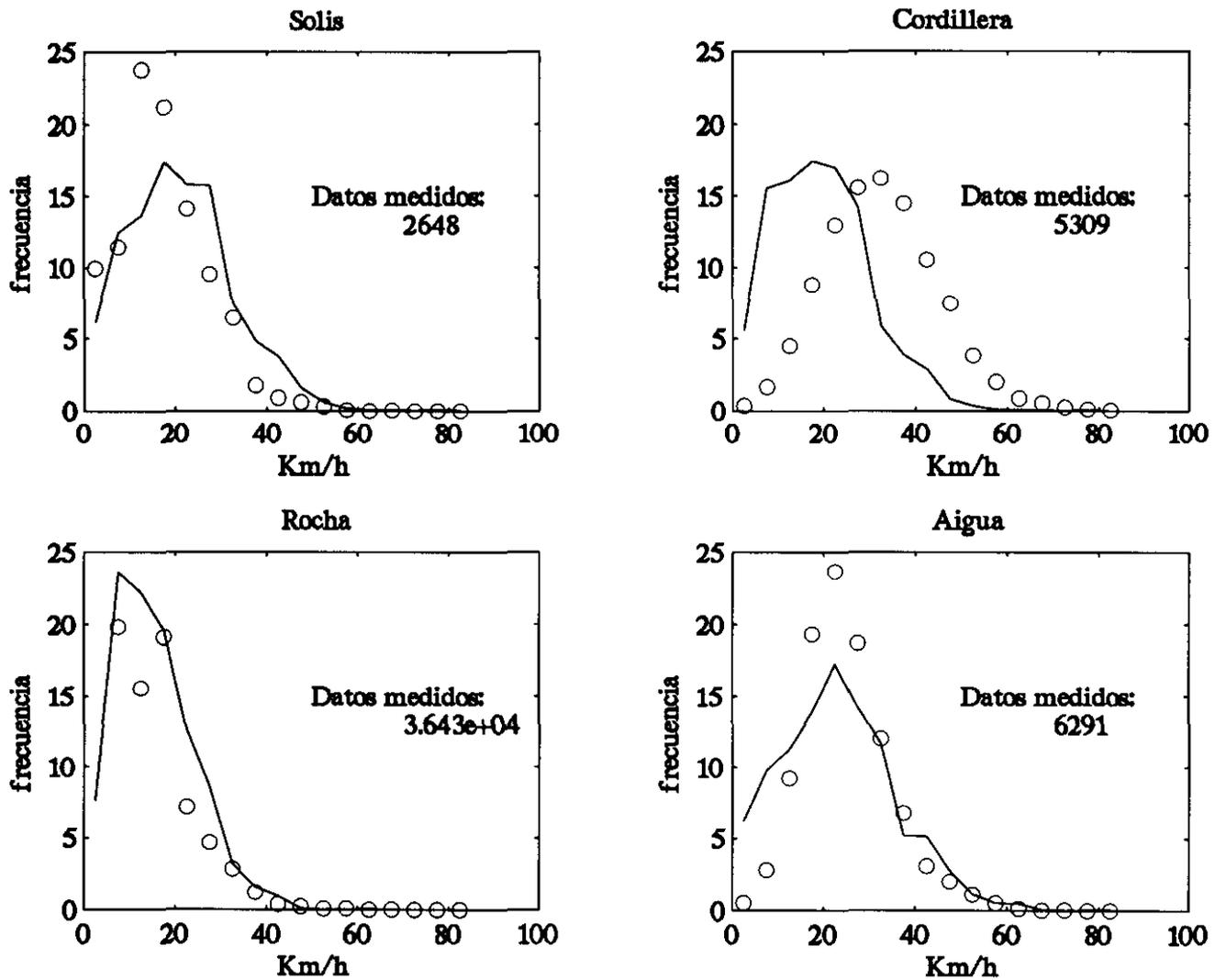


Fig. 4.14 Comparación del histograma de velocidad calculado vs. el medido en las estaciones utilizadas en el proceso de calibración automática.  
Topografía definida cada 60 km

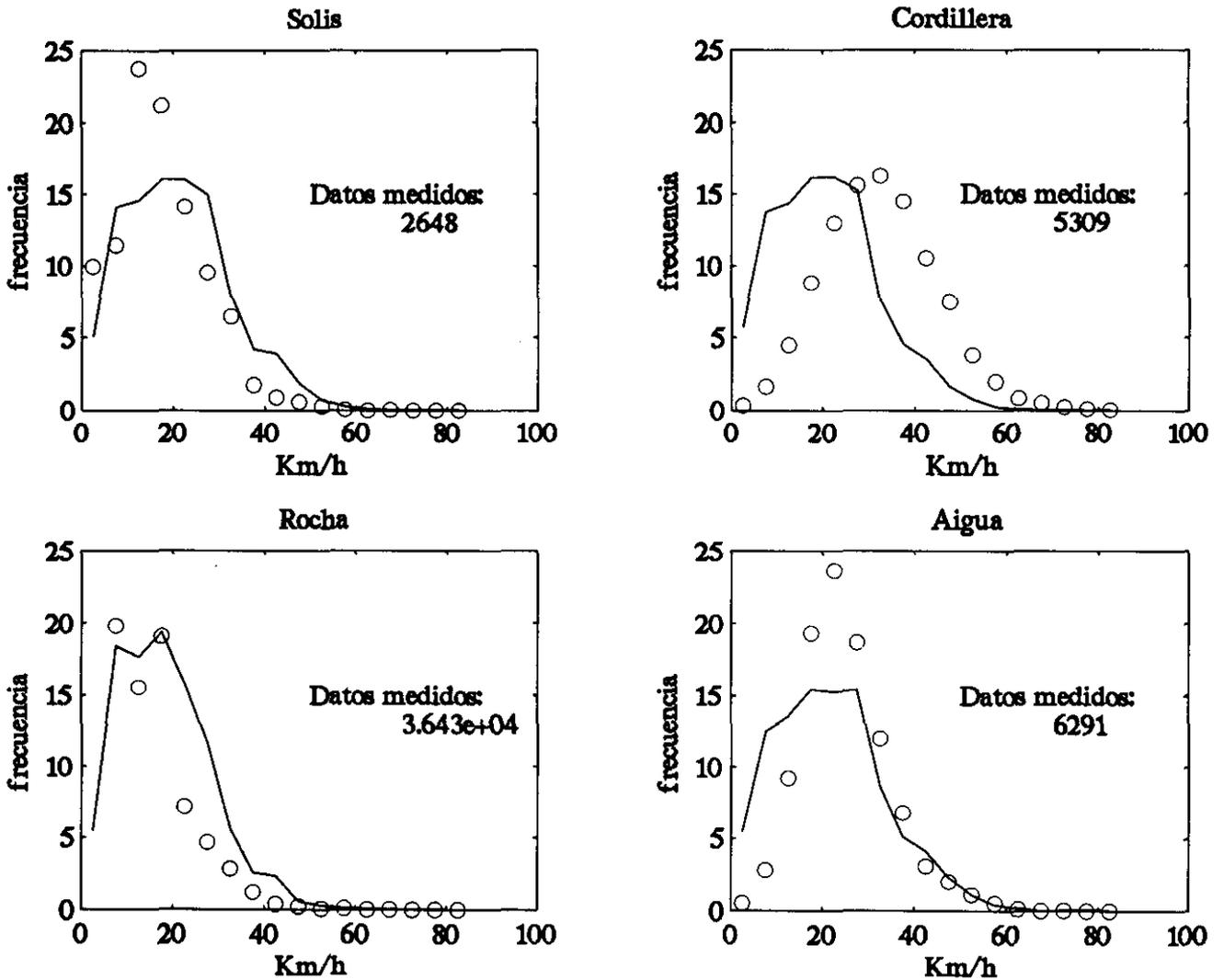


Fig. 4.15 Comparación del histograma de velocidad calculado vs. el medido en las estaciones utilizadas en el proceso de calibración automática.  
Topografía definida cada 30 km

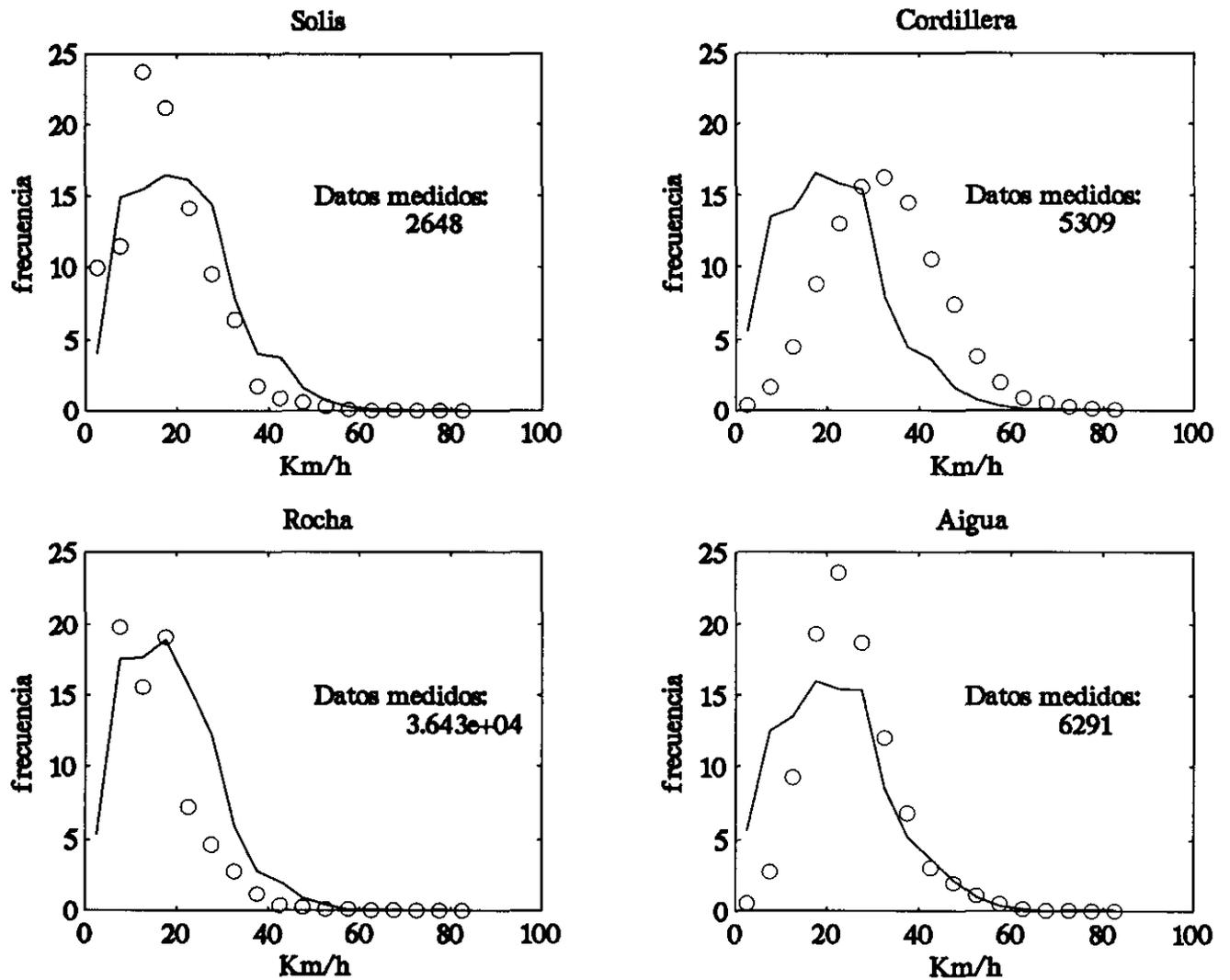


Fig. 4.16 Comparación del histograma de velocidad calculado vs. el medido en las estaciones utilizadas en el proceso de calibración automática. Topografía definida cada 15 km

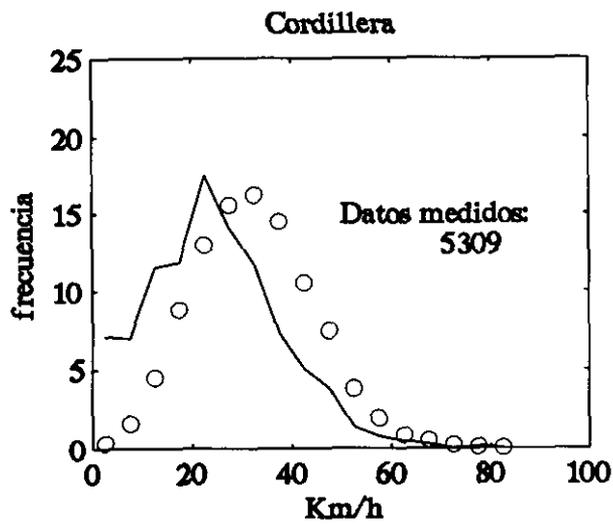
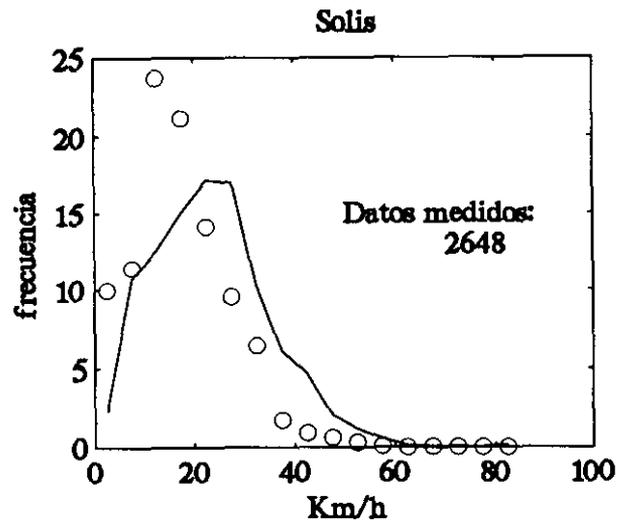
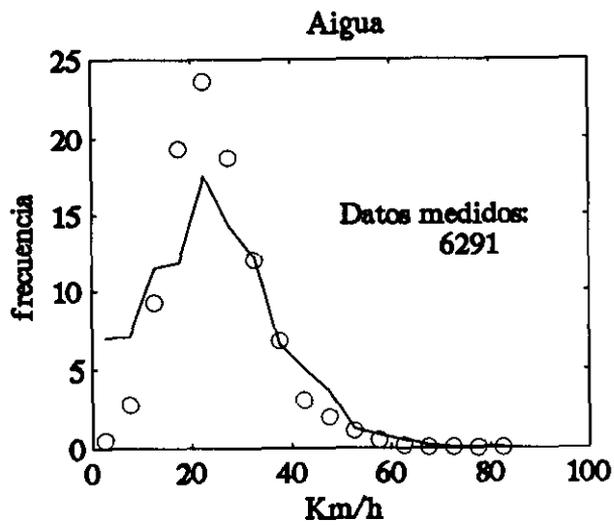


Fig. 4.17 Comparación del histograma de velocidad calculado vs. el medido en las estaciones utilizadas en el proceso de calibración automática. Topografía definida cada 6 km

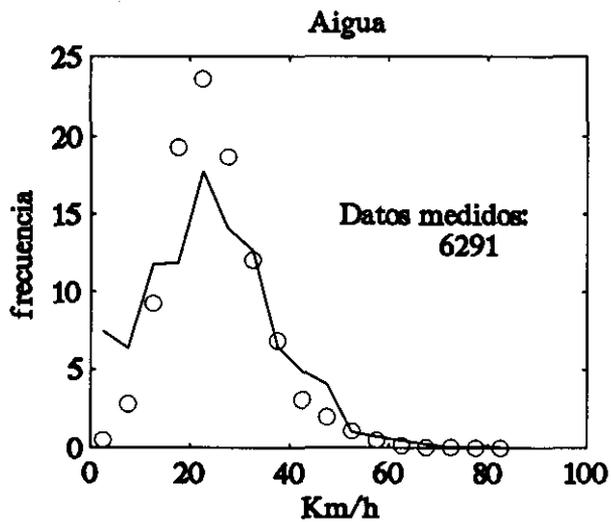
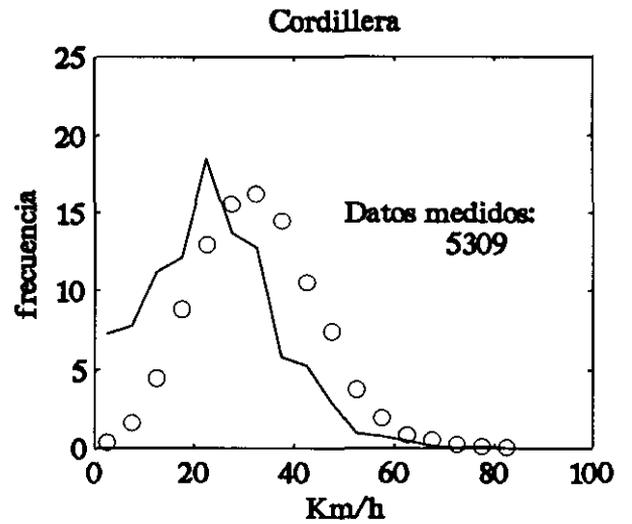
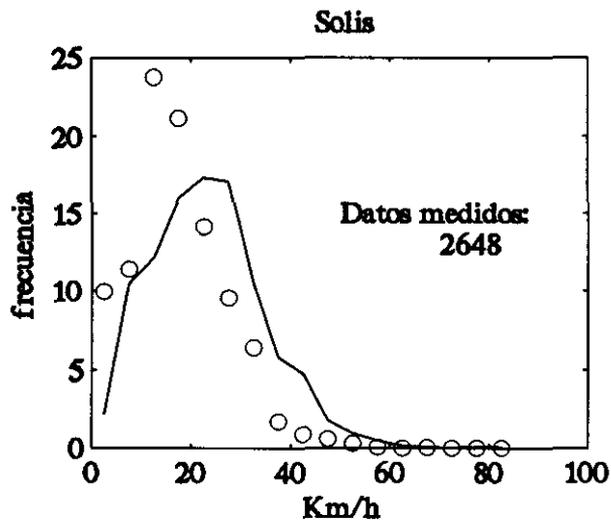


Fig. 4.18 Comparación del histograma de velocidad calculado vs. el medido en las estaciones utilizadas en el proceso de calibración automática.  
Topografía definida cada 4 km

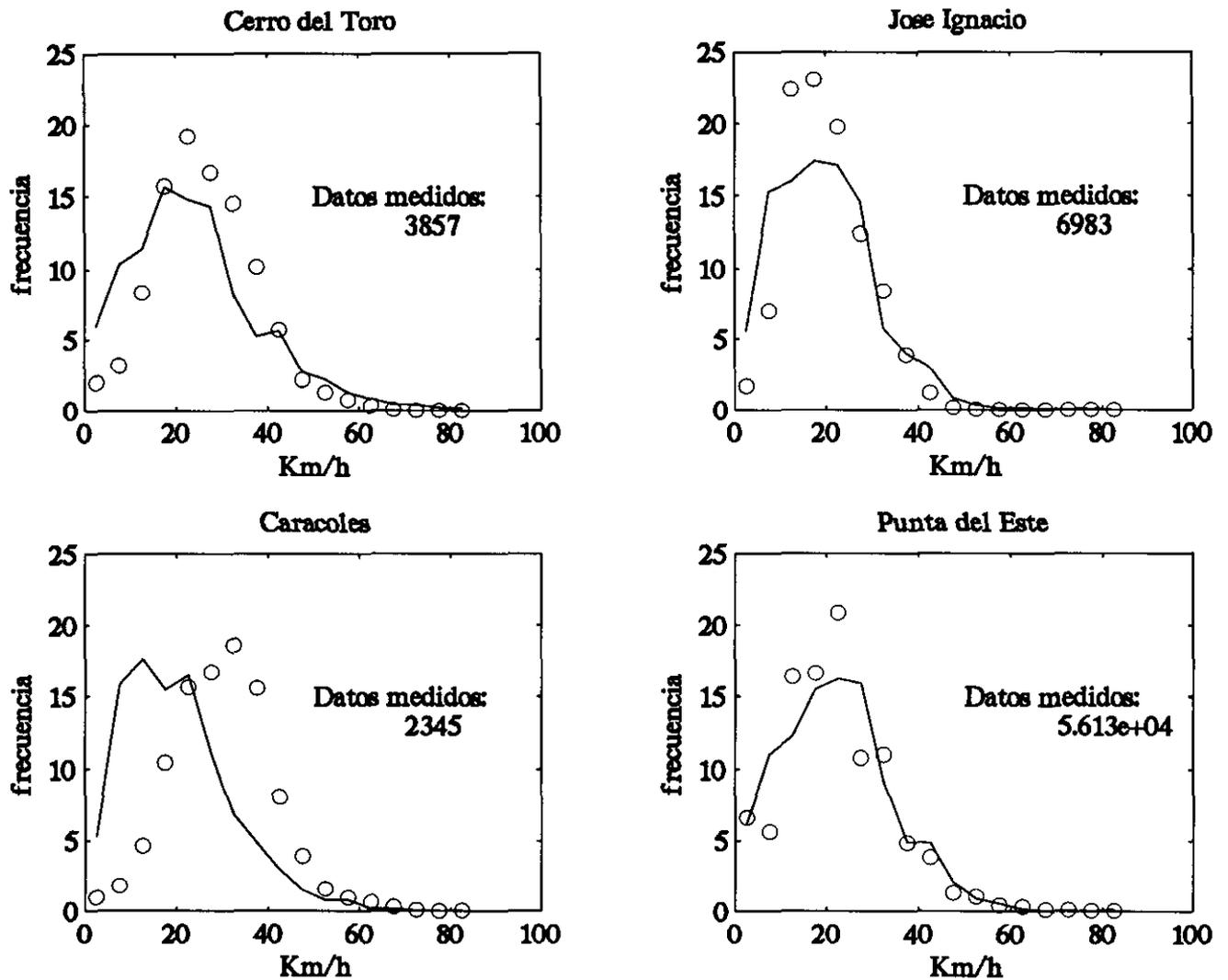


Fig. 4.19 Comparación del histograma de velocidad calculado vs. el medido en las estaciones testigo noutilizadas en el proceso de calibración automática. Topografía definida cada 60 km

Por su carácter bidimensional, pudo ser ensayada en casi todas las direcciones en el túnel de viento, y los resultados se pueden asumir válidos para una longitud de terreno que excede en mucho a lo medido en túnel. Se ve que el cálculo subestima las velocidades, fenómeno muy evidente en las fig. 4.19, 4.20 y 4.21, pero que tal evolución se ve disminuida en la fig. 4.22 y 4.23. En ellas la moda se acerca al valor medido.

Es remarcable que la otra zona medida en túnel tenga un ajuste muy bueno en todos los casos; lo mismo ocurre con José Ignacio y Punta del Este.

En general puede decirse que el desempeño del modelo como predictor es razonablemente bueno, por lo menos a la hora de predecir los histogramas.

#### **4.1.3. Ajuste obtenido en los histogramas del factor de capacidad**

Dado que el objeto inicial de este trabajo era generar un modelo capaz de predecir el potencial eólico, es importante considerar el desempeño del método en esa aplicación.

En el caso del potencial eólico, la curva de potencia del aerogenerador opera como un filtro pasabanda; las velocidades bajas, menor que la velocidad de arranque, dan potencia nula, así como las que superan una velocidad de corte. Ello contribuirá a disimular el efecto de sobreestimación de las velocidades bajas. El área debajo de la función representada es la energía anual producible por el aparato, en relación a la energía anual teóricamente producible. En todos los casos se utilizó como aerogenerador de prueba el NORDTANK 150, de 150 kW de potencia nominal, al igual que en el trabajo de Cisa et al., 1990.

En la fig. 4.24 se observa que en el caso de Aiguá, el ajuste es relativamente bueno, siendo sobreestimada la energía extraíble en el caso de Rocha y Solís y subestimada para Cordillera. En este último punto, la predicción se va corrigiendo en algo a medida que se refina la grilla (fig. 4.25 a 4.28), obteniéndose en las fig. 4.27 y 4.28 un ajuste ya razonable.

Para el caso de las estaciones no calibradas (fig. 4.27 a 4.33), el ajuste en Caracoles es ahora muy bueno para los cálculos con grillas finas (fig. 4.32 y 4.33), pero no lo es tanto para el cálculo con grilla de 60 km (fig. 4.29). Otro que también mejora con el refinamiento de la grilla es el Cerro del Toro, así como Punta del Este, en la que se llega a modelar un escalón que tiene en el histograma original (fig. 4.33). Esto último no debe sorprender: a lo sumo, se está calculando en nodos que distan no más de 4 km de la propia estación, por lo que la semejanza debiera ser mayor (no olvidar que Punta del Este participa como dato de partida en el cálculo).

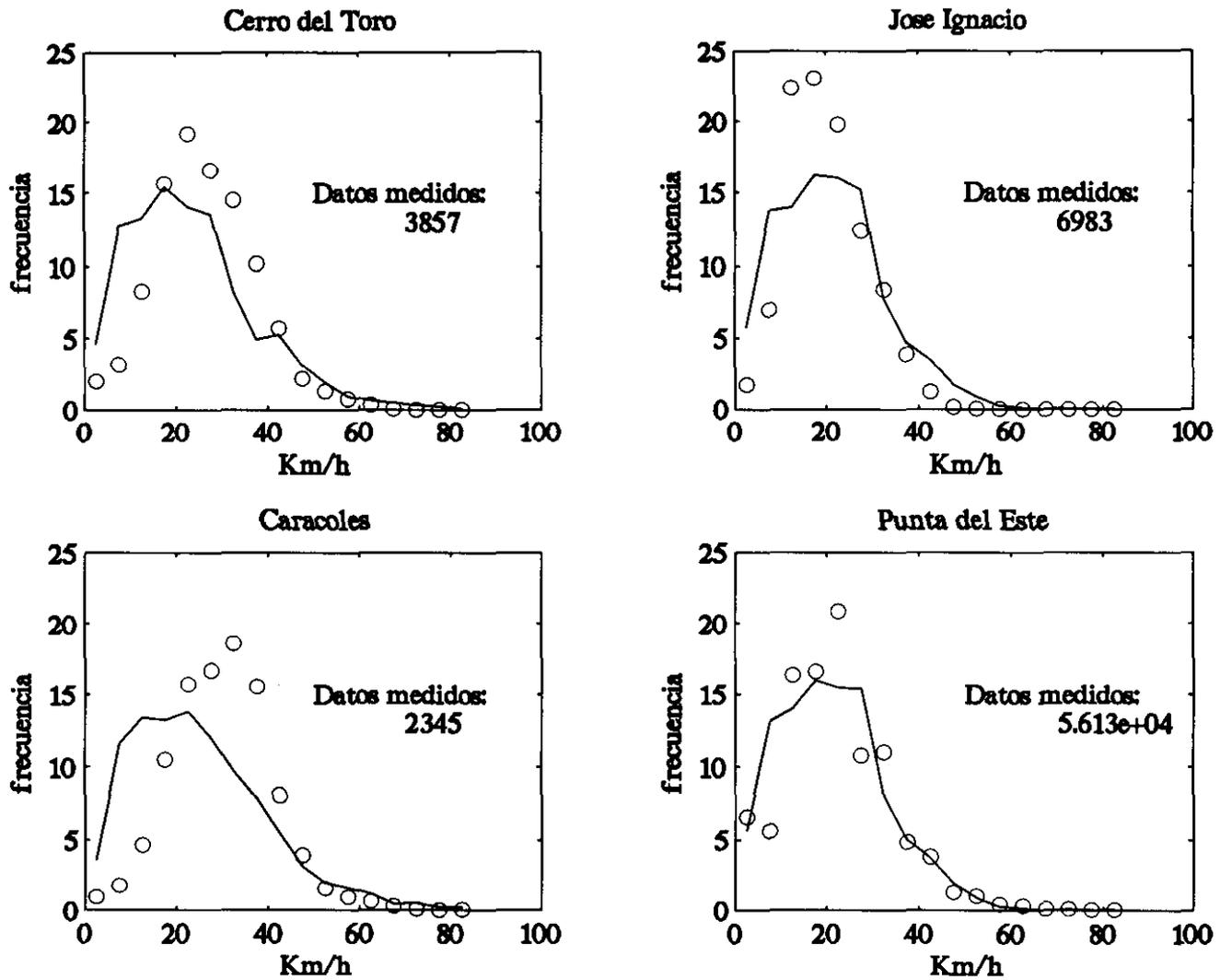


Fig. 4.20 Comparación del histograma de velocidad calculado vs. el medido en las estaciones testigo no utilizadas en el proceso de calibración automática. Topografía definida cada 30 km

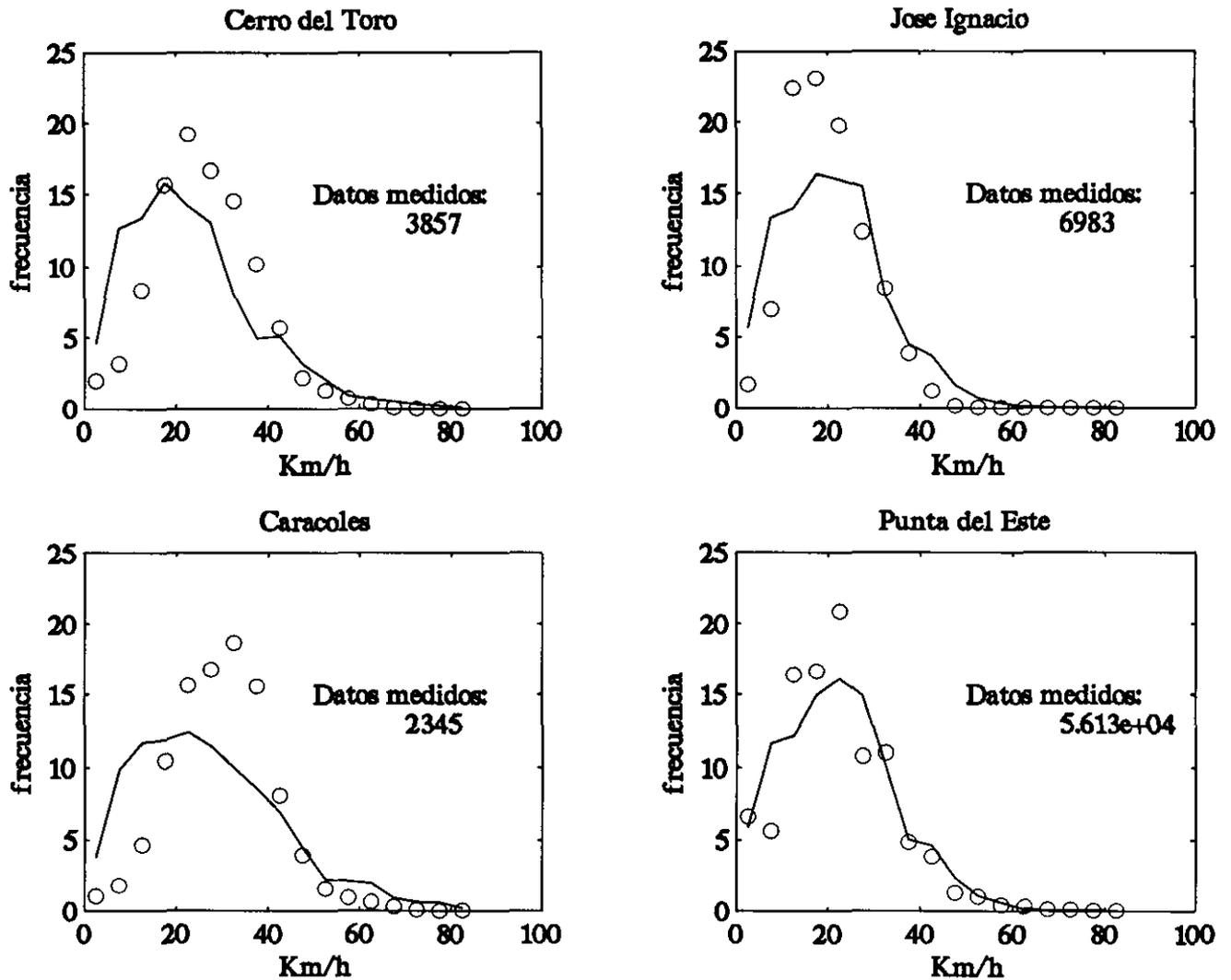


Fig. 4.21 Comparación del histograma de velocidad calculado vs. el medido en las estaciones testigo no utilizadas en el proceso de calibración automática. Topografía definida cada 15 km

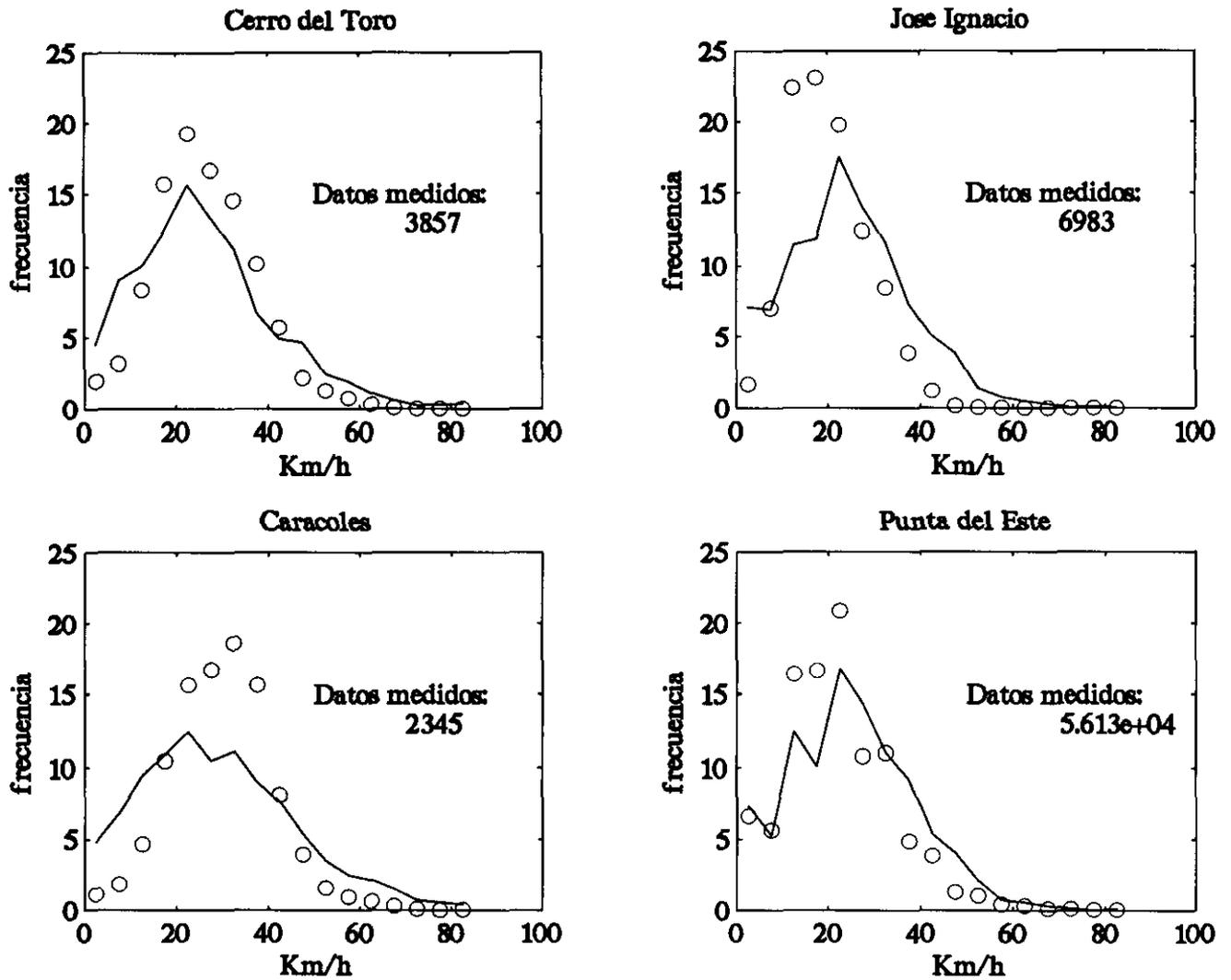


Fig. 4.22 Comparación del histograma de velocidad calculado vs. el medido en las estaciones testigo no utilizadas en el proceso de calibración automática. Topografía definida cada 6 km

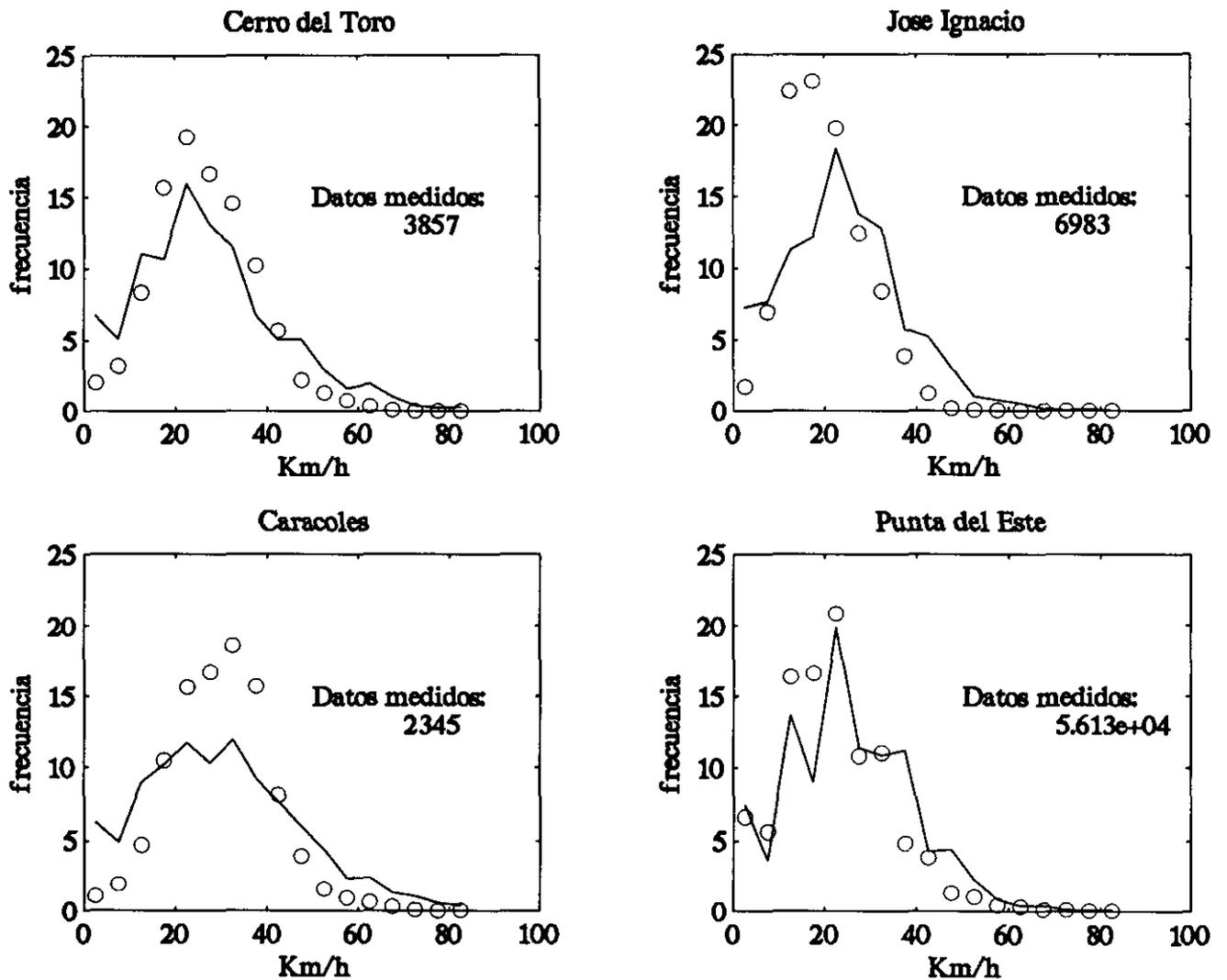


Fig. 4.23 Comparación del histograma de velocidad calculado vs. el medido en las estaciones testigo no utilizadas en el proceso de calibración automática. Topografía definida cada 4 km

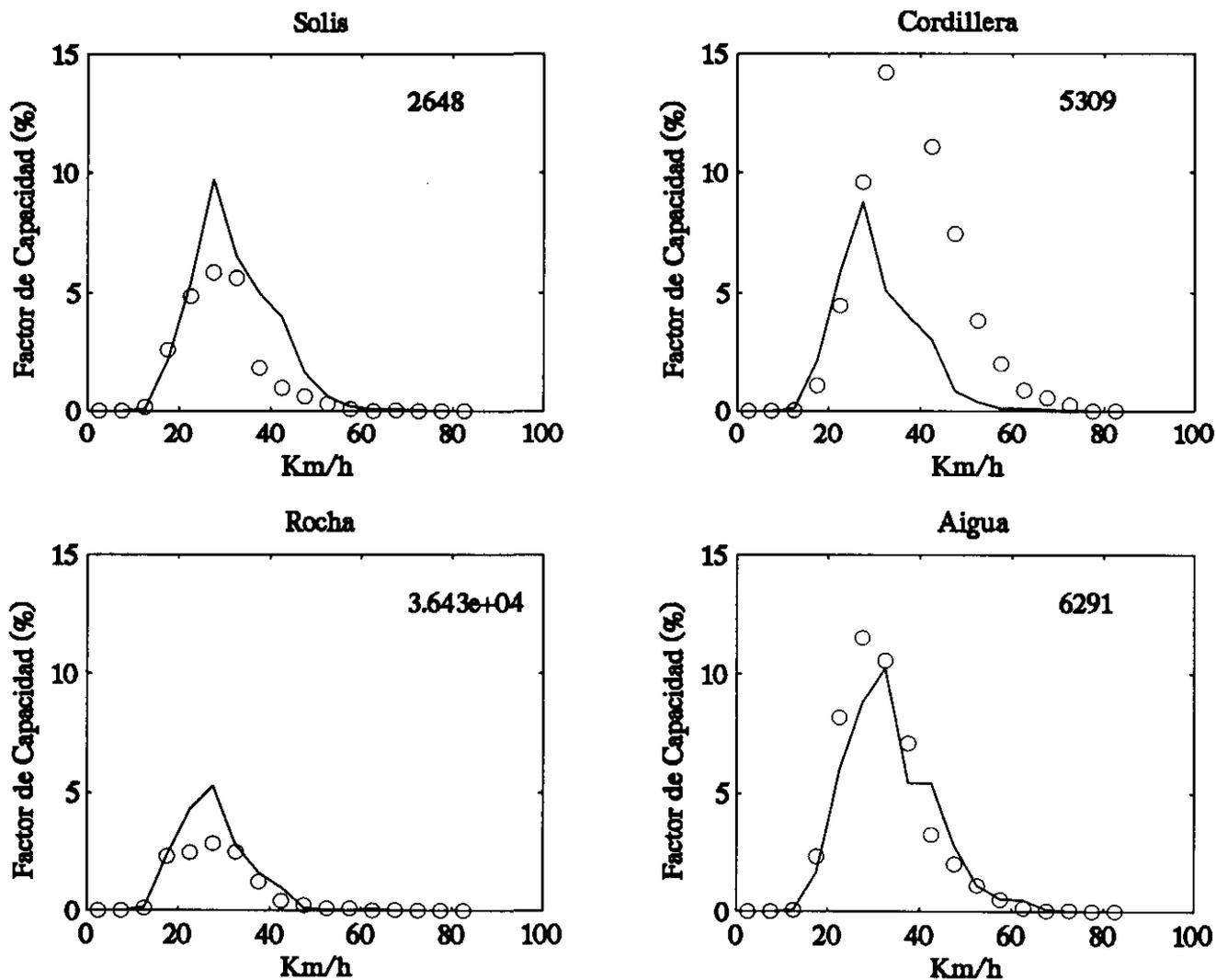


Fig. 4.24 Comparación de histogramas de factor de capacidad calculados vs. medidos en las estaciones testigo en el proceso de calibración automática. Topografía definida cada 60 km

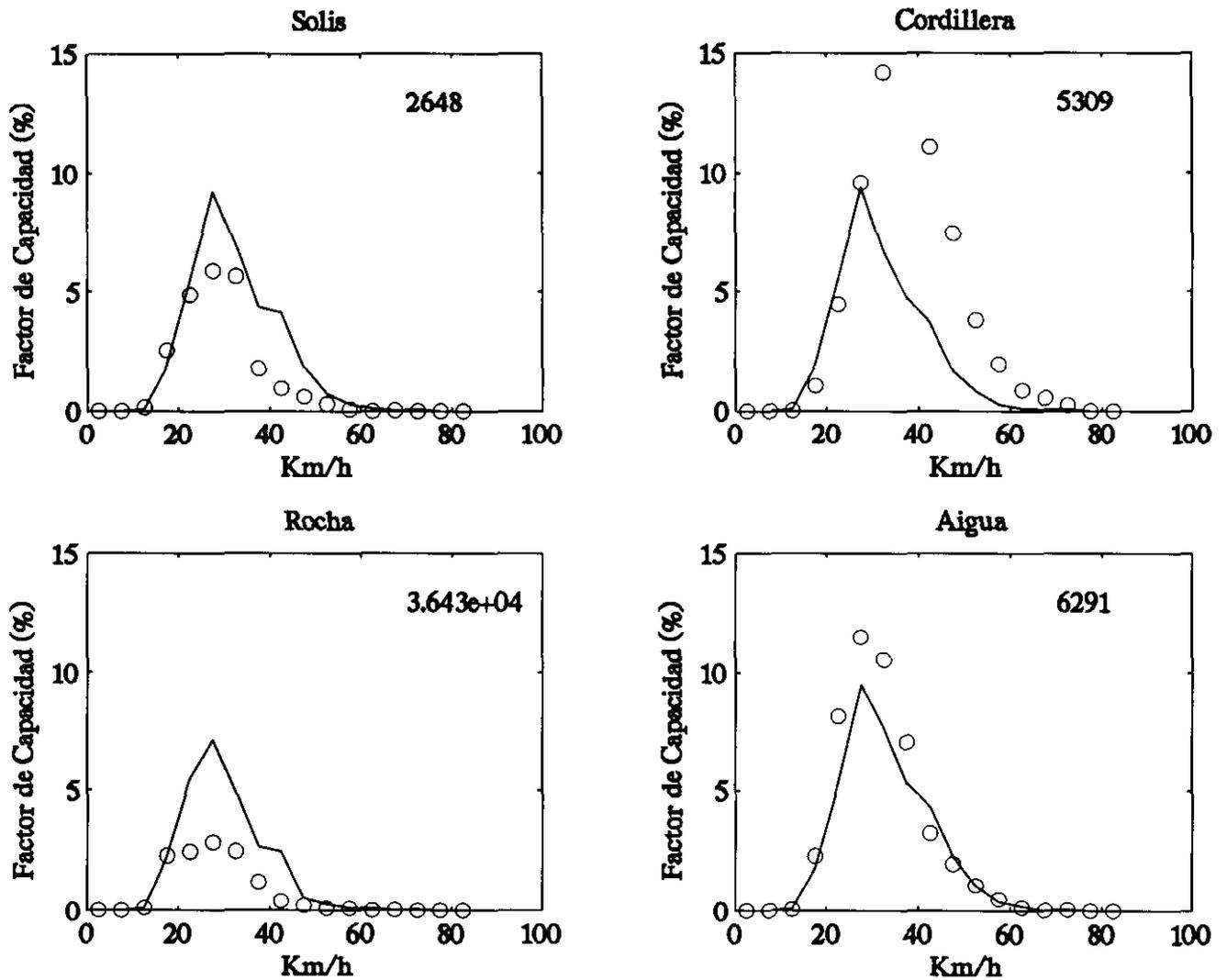


Fig. 4.25 Comparación de histogramas de factor de capacidad calculados vs. medidos en las estaciones testigo en el proceso de calibración automática. Topografía definida cada 30 km

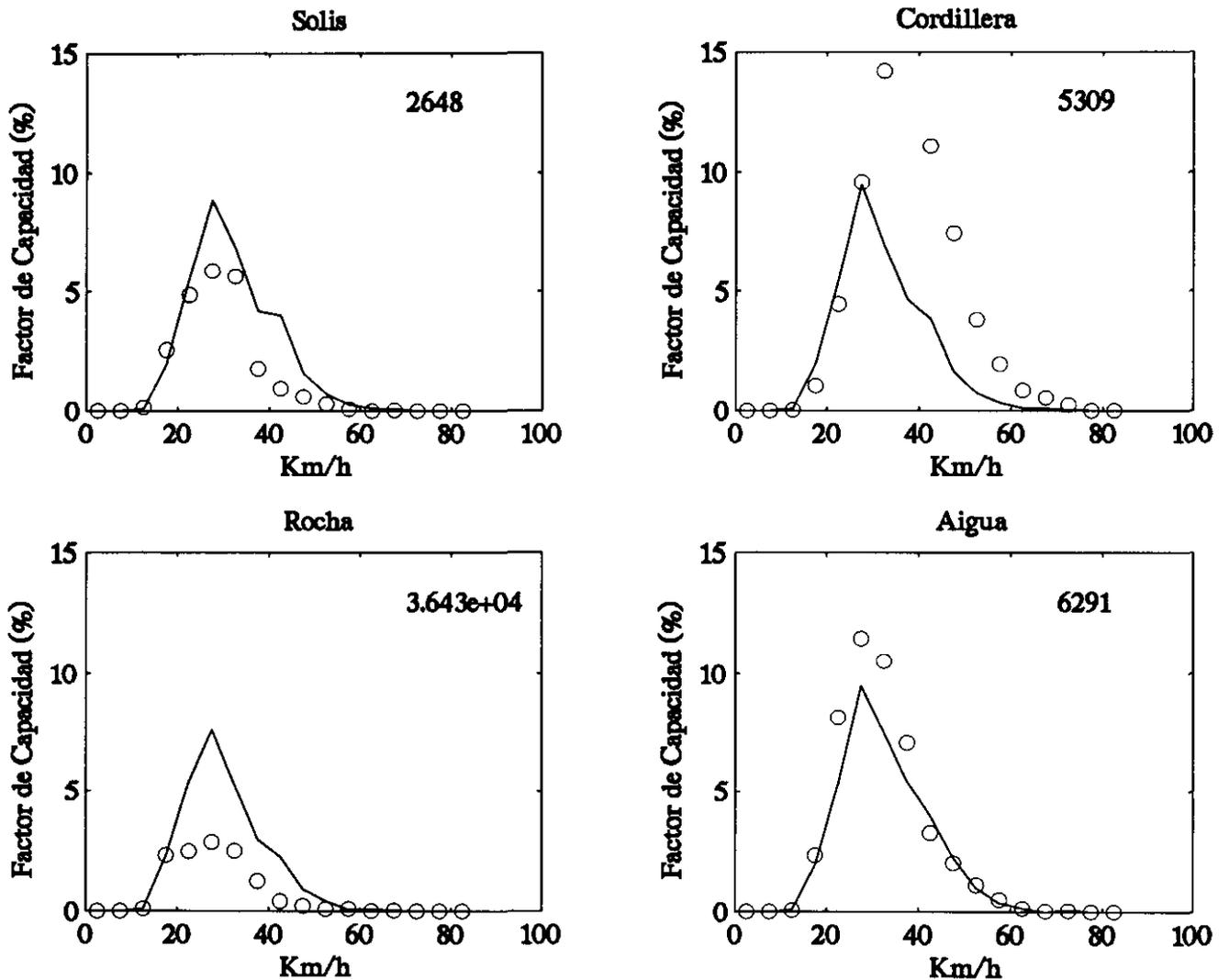


Fig. 4.26 Comparación de histogramas de factor de capacidad calculados vs. medidos en las estaciones testigo en el proceso de calibración automática. Topografía definida cada 15 km

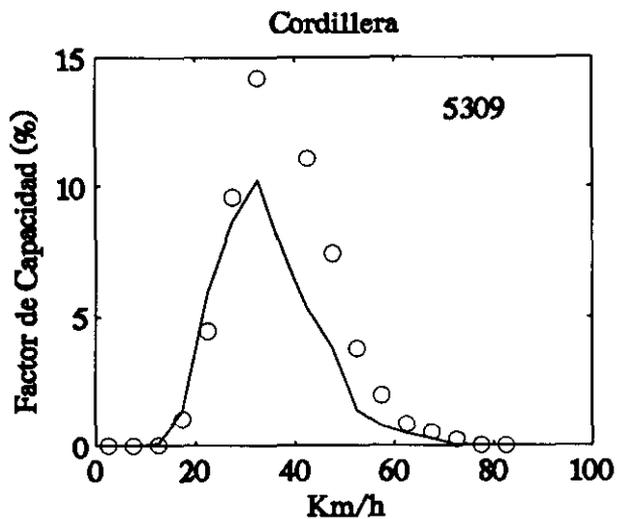
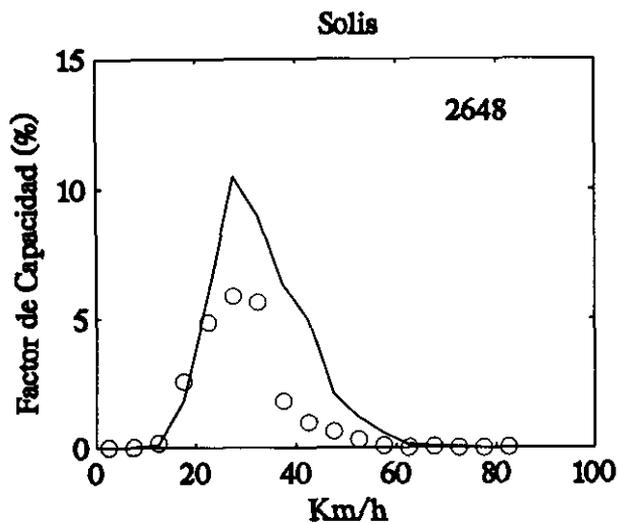
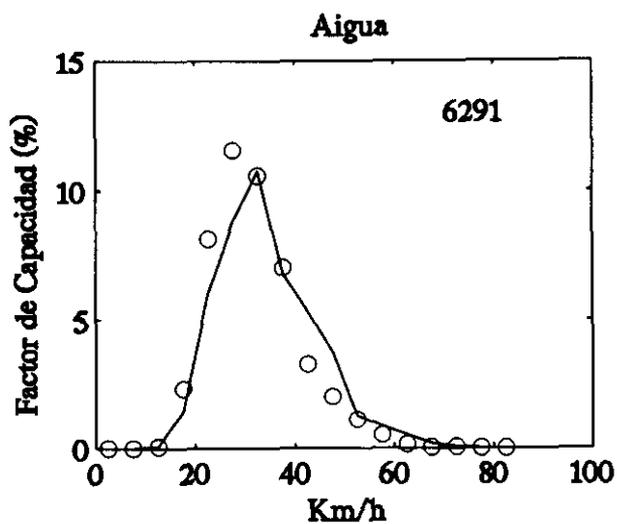


Fig. 4.27 Comparación de histogramas de factor de capacidad calculados vs. medidos en las estaciones testigo en el proceso de calibración automática. Topografía definida cada 6 km

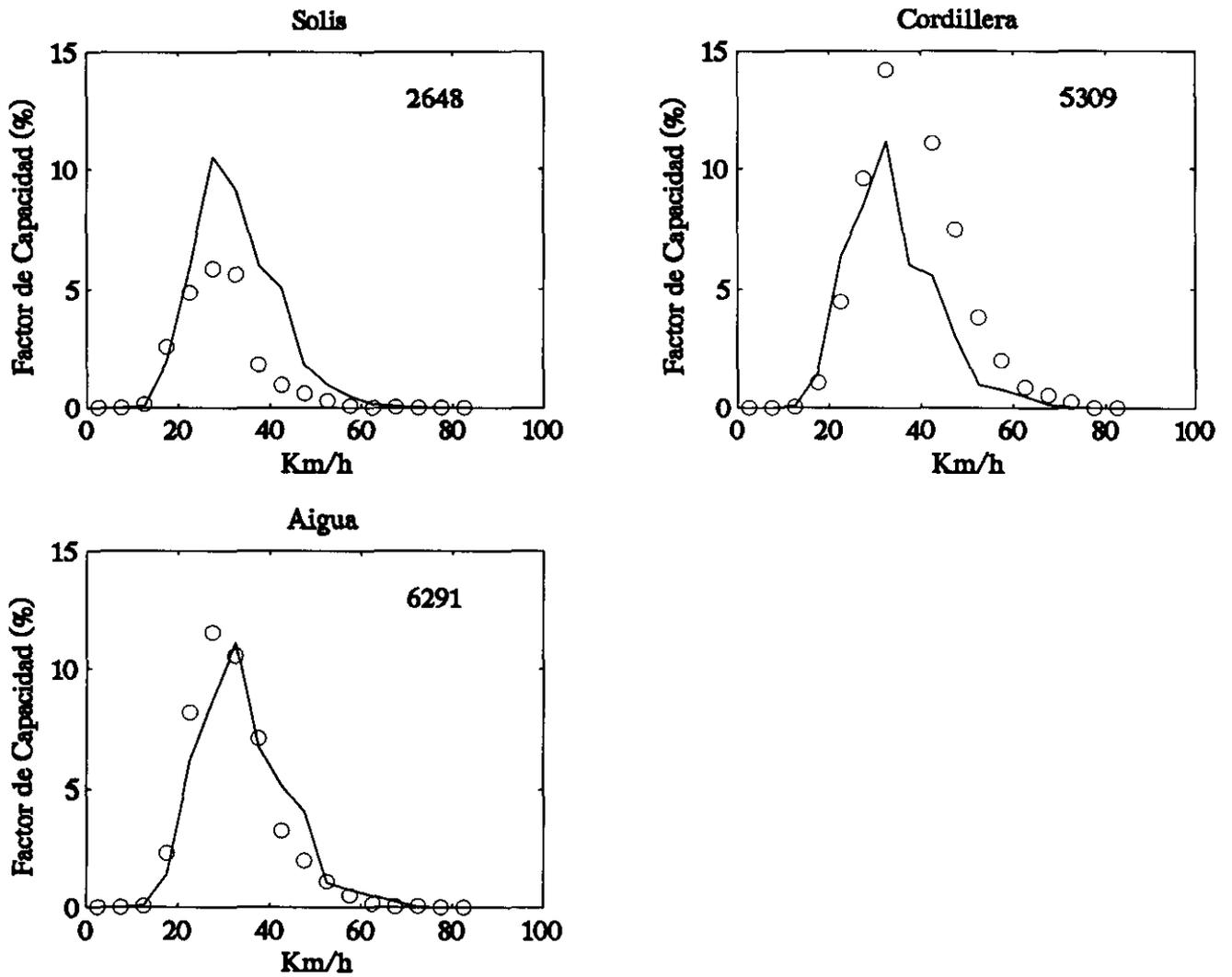


Fig. 4.28 Comparación de histogramas de factor de capacidad calculados vs. medidos en las estaciones testigo en el proceso de calibración automática. Topografía definida cada 4 km

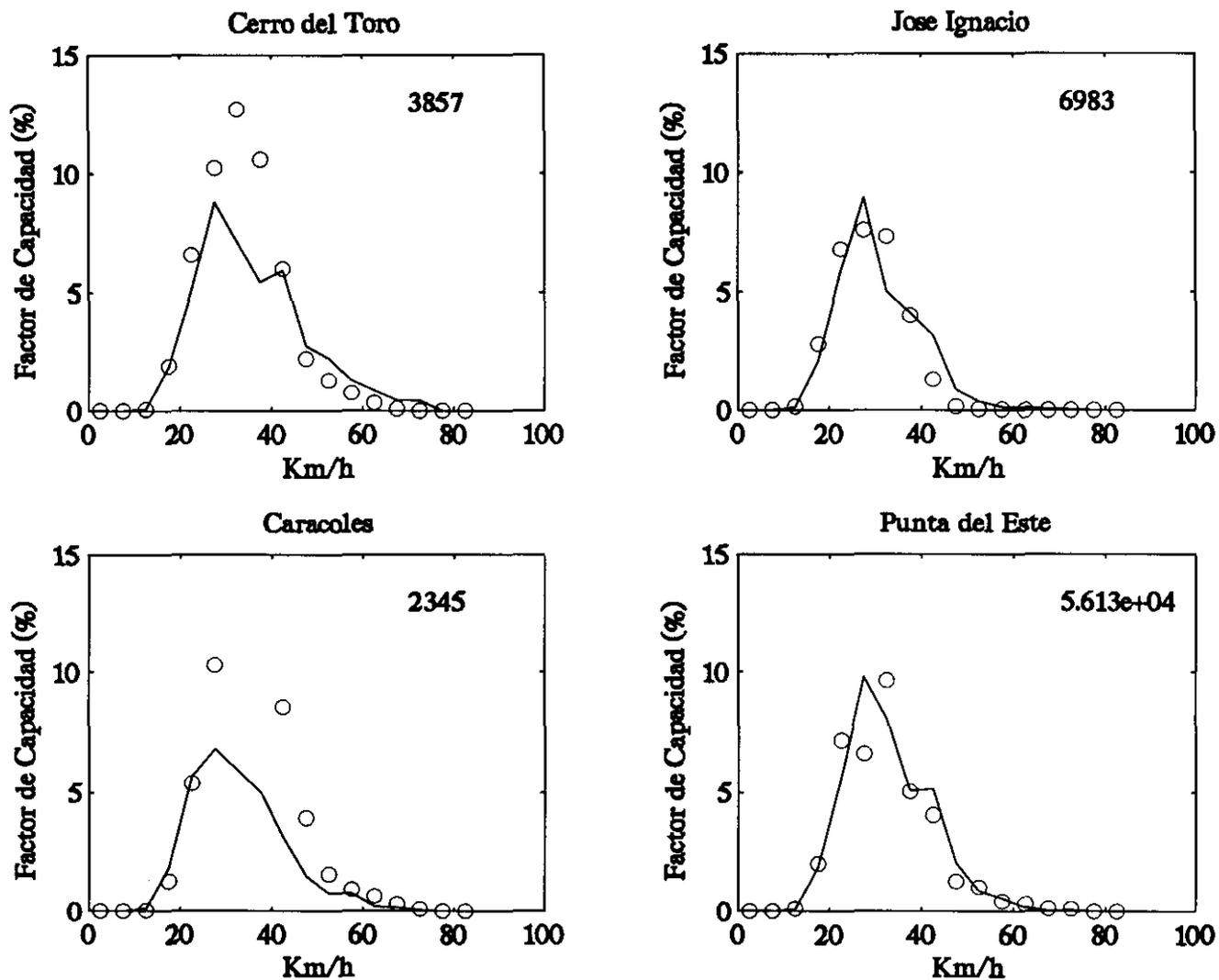


Fig. 4.29 Comparación de histogramas de factor de capacidad calculados vs. medidos en las estaciones testigo no utilizadas en el proceso de calibración automática. Topografía definida cada 60 km

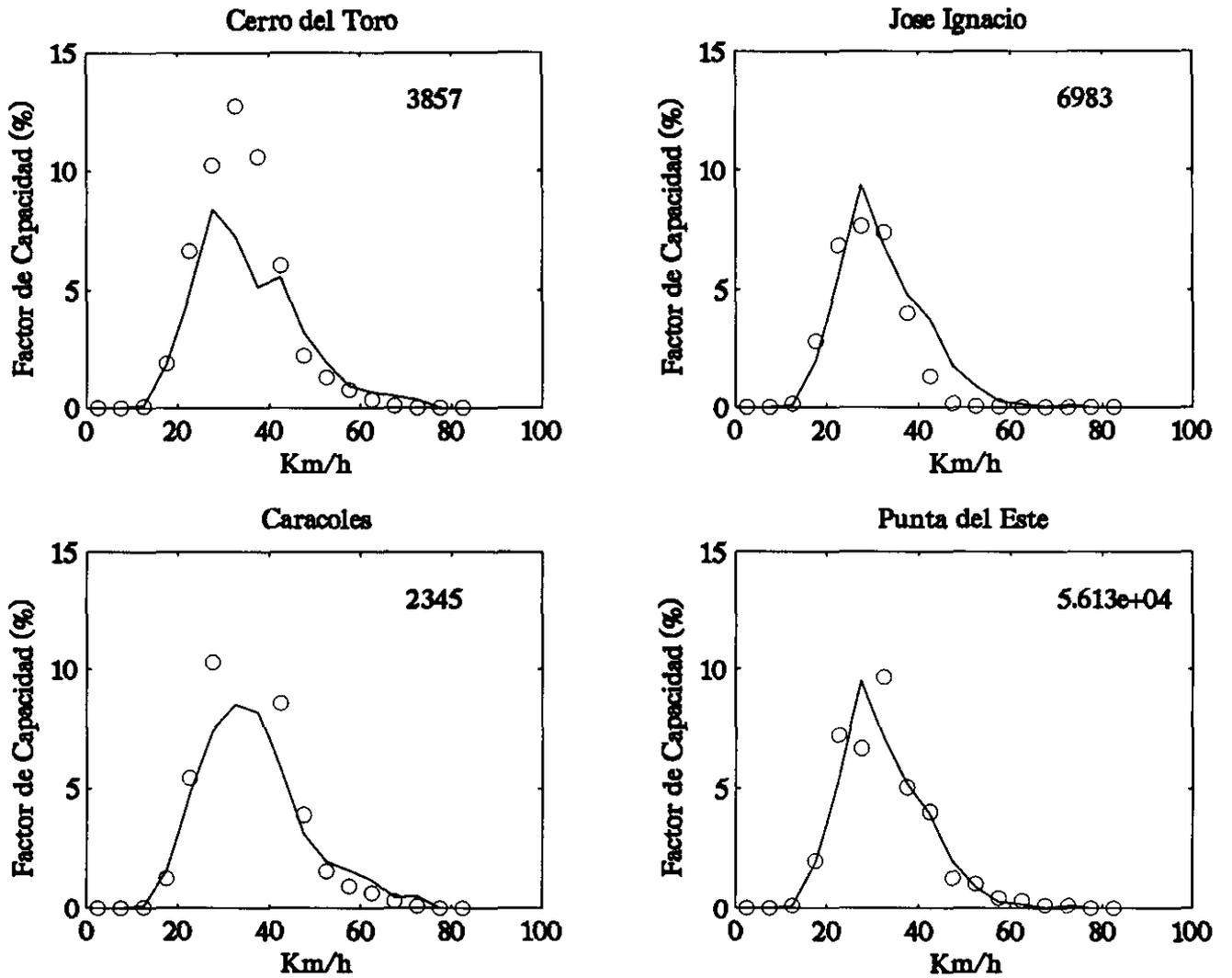


Fig. 4.30 Comparación de histogramas de factor de capacidad calculados vs. medidos en las estaciones testigo no utilizadas en el proceso de calibración automática. Topografía definida cada 30 km

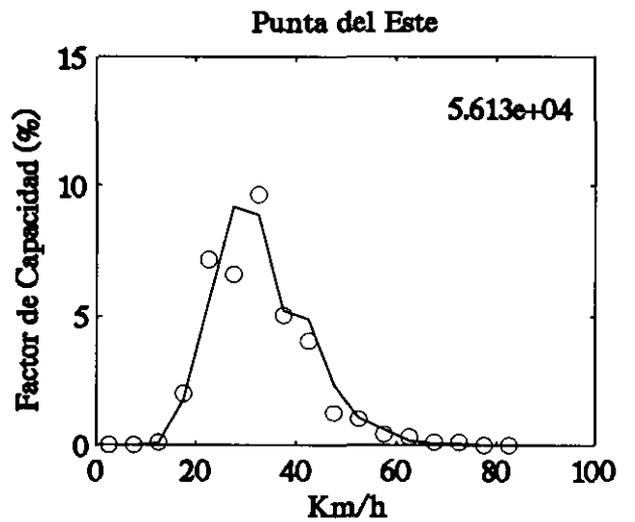
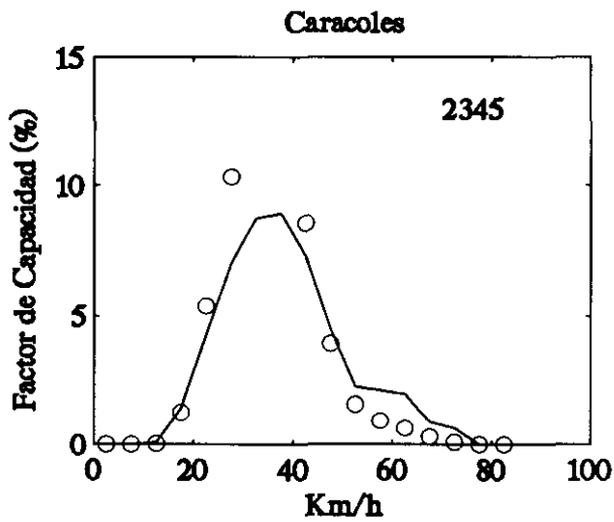
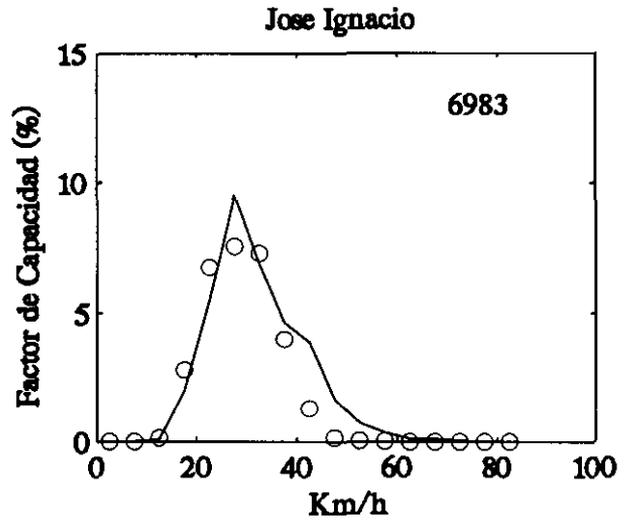
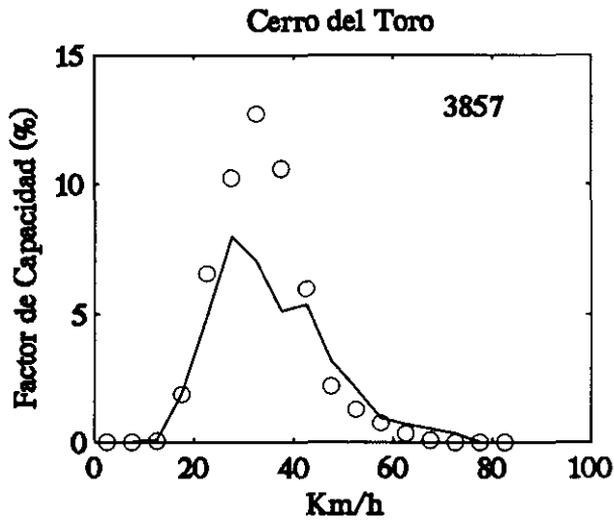


Fig. 4.31 Comparación de histogramas de factor de capacidad calculados vs. medidos en las estaciones testigo no utilizadas en el proceso de calibración automática. Topografía definida cada 15 km

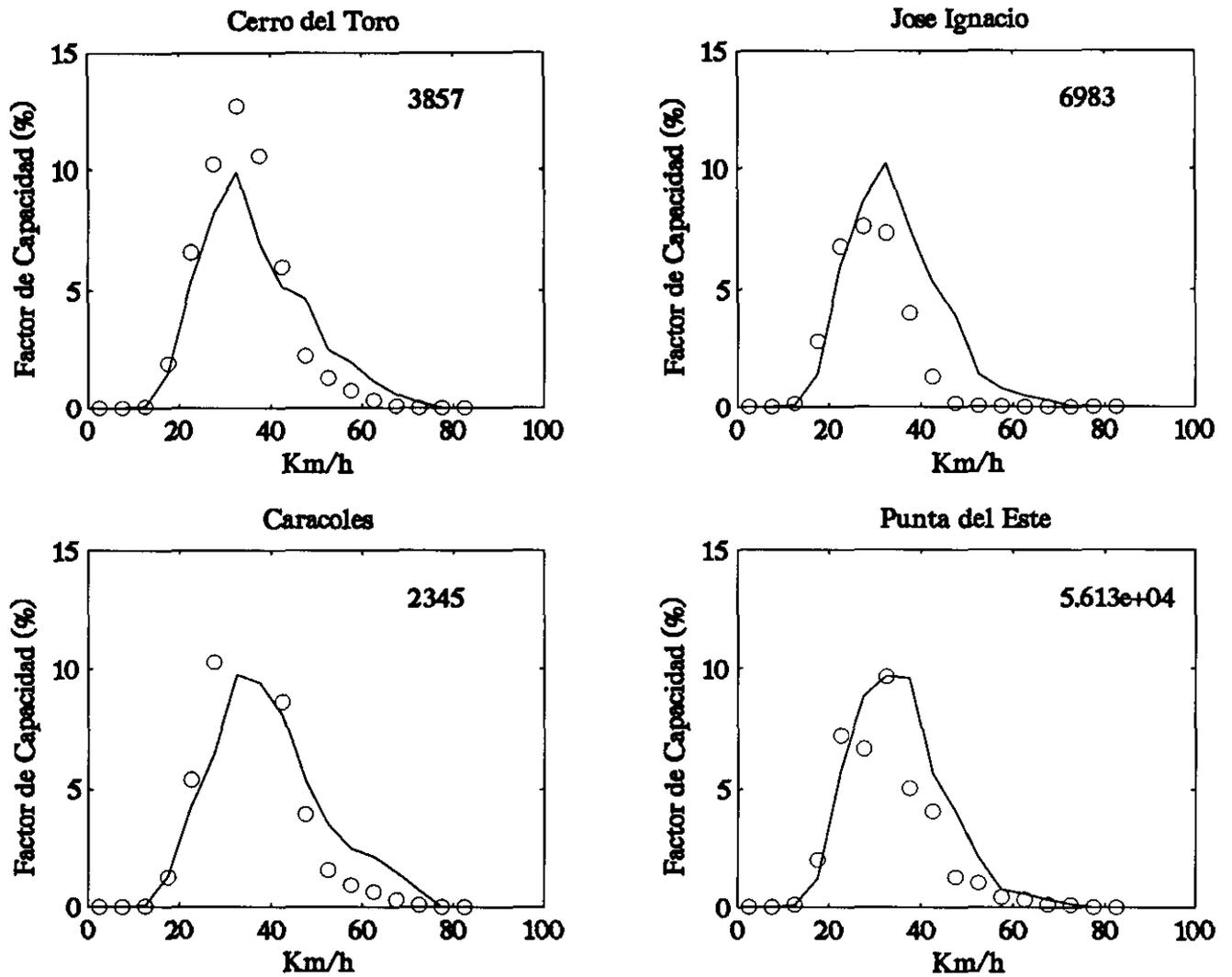


Fig. 4.32 Comparación de histogramas de factor de capacidad calculados vs. medidos en las estaciones testigo no utilizadas en el proceso de calibración automática. Topografía definida cada 6 km

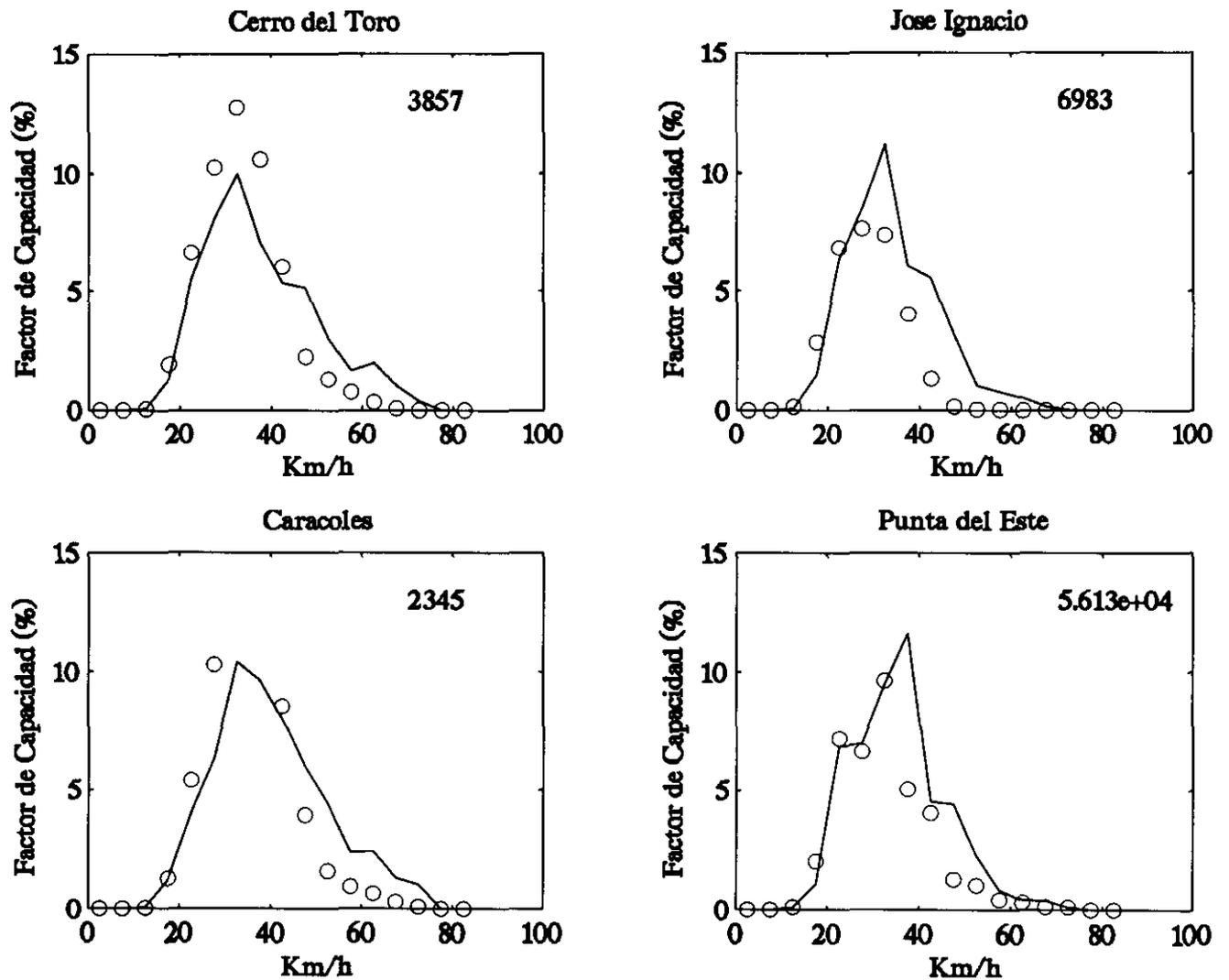


Fig. 4.33 Comparación de histogramas de factor de capacidad calculados vs. medidos en las estaciones testigo no utilizadas en el proceso de calibración automática. Topografía definida cada 4 km

#### 4.1.4 Ajuste obtenido en las curvas de duración de factor de capacidad

A los efectos de su aplicación al área de la energía eólica, una distribución importante es la del número de horas al año que la planta es capaz de producir una potencia dada.

En la fig. 4.34 se observa el ajuste para las estaciones participantes en la calibración. Obsérvese que para Cordillera el modelo subvalúa la potencia, por lo que las predicciones son muy conservadoras. En el caso de Aiguá, el ajuste es casi ideal. Para Rocha y Solís se sobreestiman los valores, que son de por sí pequeños.

El ajuste para Rocha y Cordillera mejora, sin embargo al refinar la grilla, fenómeno que no se aprecia en Solís. Ver fig. 4.37 a 4.38.

Para las estaciones no calibradas se observa una mejora al refinar la grilla en Caracoles (ver fig. 4.39 y comparar con 4.43). En cambio, José Ignacio comienza muy bien con la grilla gruesa, fig. 4.39 y se desajusta en algo al refinar (fig. 4.40 a 4.43), lo mismo que Punta del Este. No está claro cual puede ser el motivo de tal comportamiento.

#### 4.1.5 Efecto del uso de menor número de términos en la reconstrucción.

Dado que se ha dicho que los patrones de índice mayor están asociados típicamente a ruido en los datos, se ha considerado la posibilidad de filtrar tal ruido haciendo una reconstrucción de las series con un número menor de términos (ver ec. 2.53).

En las fig. 4.44, 4.46 y 4.48 se muestra el ajuste obtenido para el caso de la reconstrucción con 5 de los 10 términos posibles, para el caso de la topografía cada 6 km. El efecto no es demasiado visible en el caso de la frecuencia (comparar con fig. 4.17) ni en el caso del factor de capacidad (comparar con fig. 4.27), así como para las curvas de duración (comparar con fig. 4.37) pero en ambos casos se suaviza la curva, bajando nuevamente en algo el máximo.

Similares resultados se obtienen para las curvas de los anemómetros testigo no utilizados en el cálculo, notándose algo más el cambio en Punta del Este (comparar fig. 4.45 y 4.47 con fig. 4.22 y 4.32). La curva de duración que se presenta en la fig. 4.49 es prácticamente indistinguible de la 4.42.

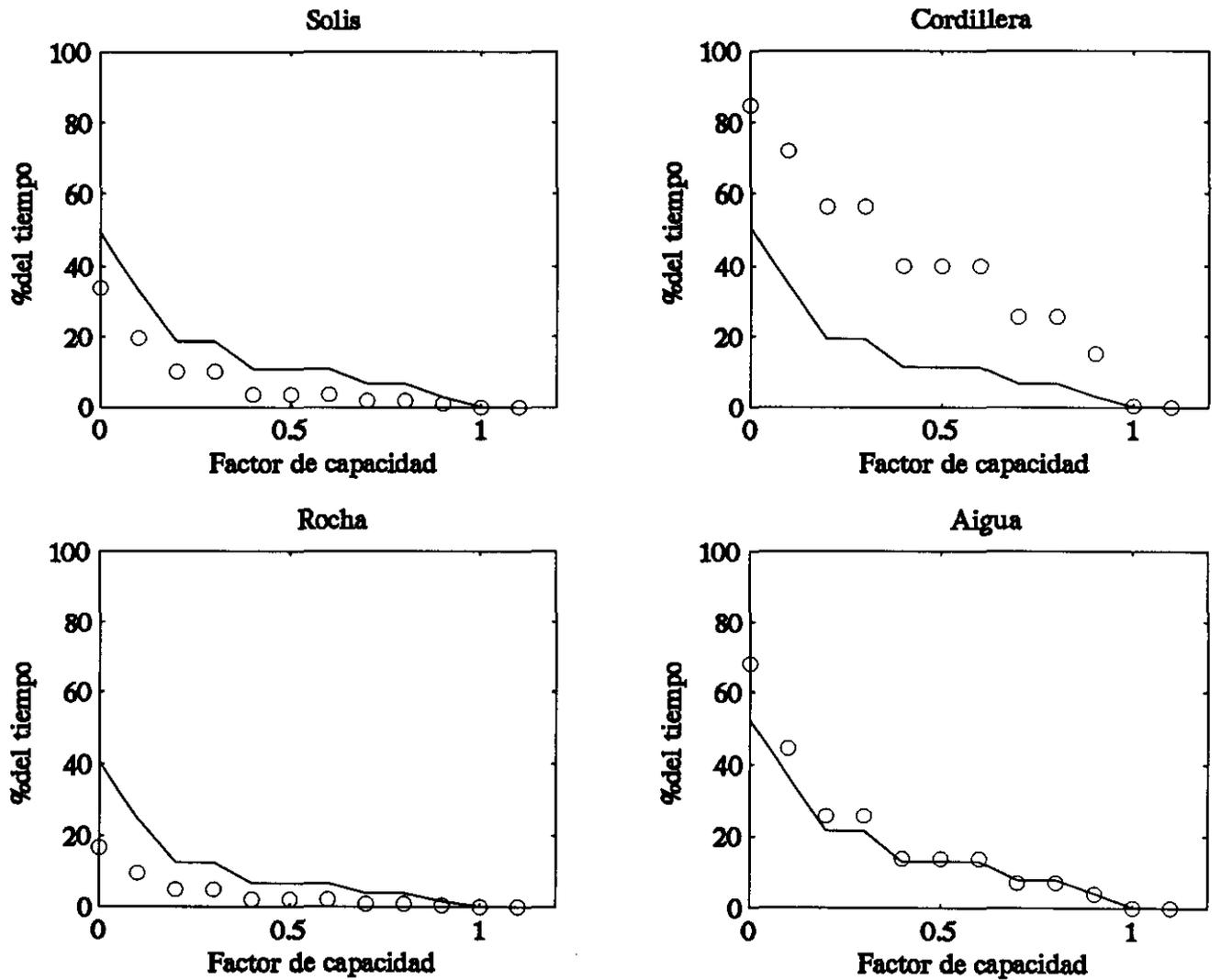


Fig. 4.34 Comparación de las curvas de duración del factor de capacidad calculados vs. medidos en las estaciones testigo utilizadas en el proceso de calibración automática. Topografía definida cada 60 km

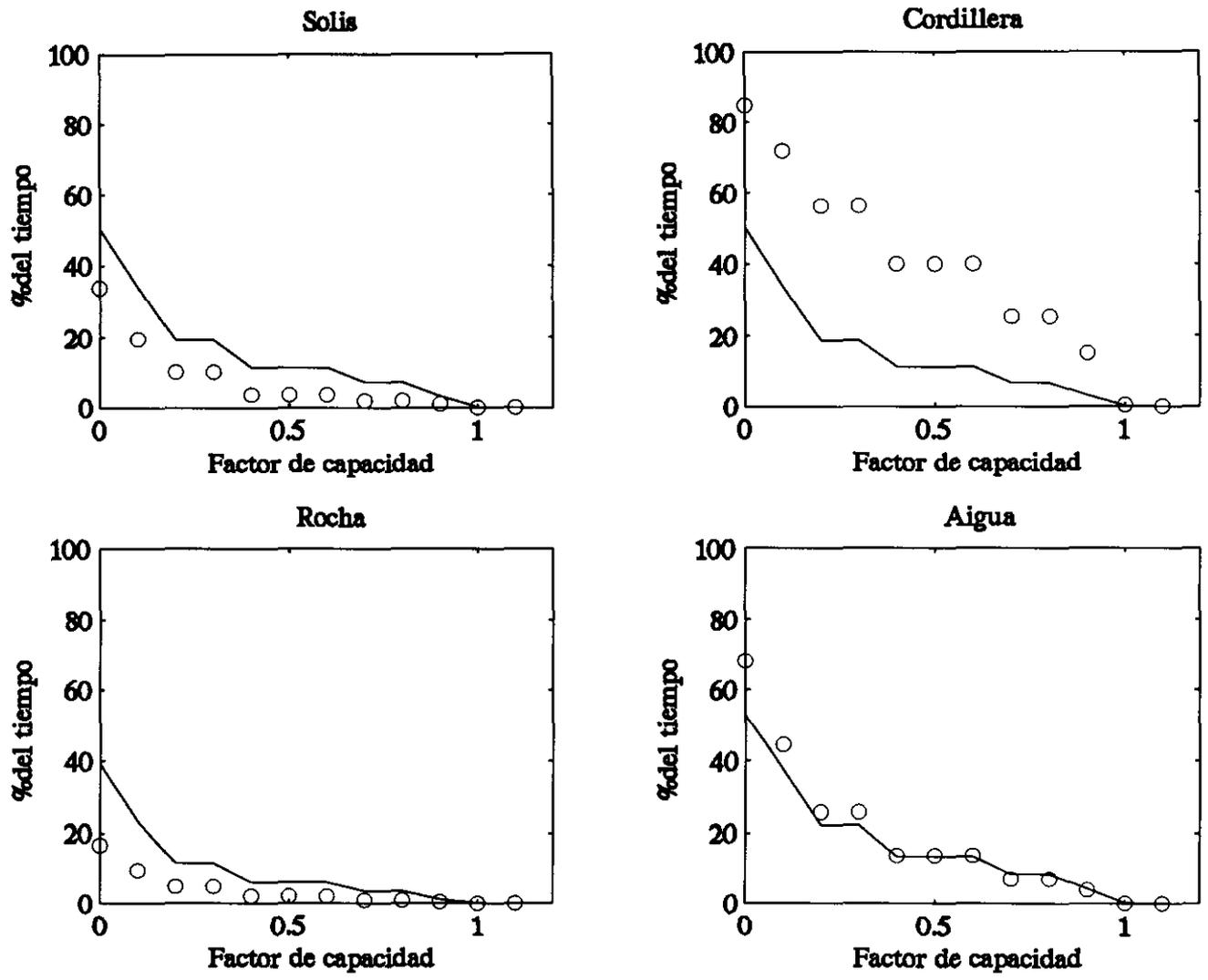


Fig. 4.35 Comparación de las curvas de duración del factor de capacidad calculados vs. medidos en las estaciones testigo utilizadas en el proceso de calibración automática. Topografía definida cada 30 km

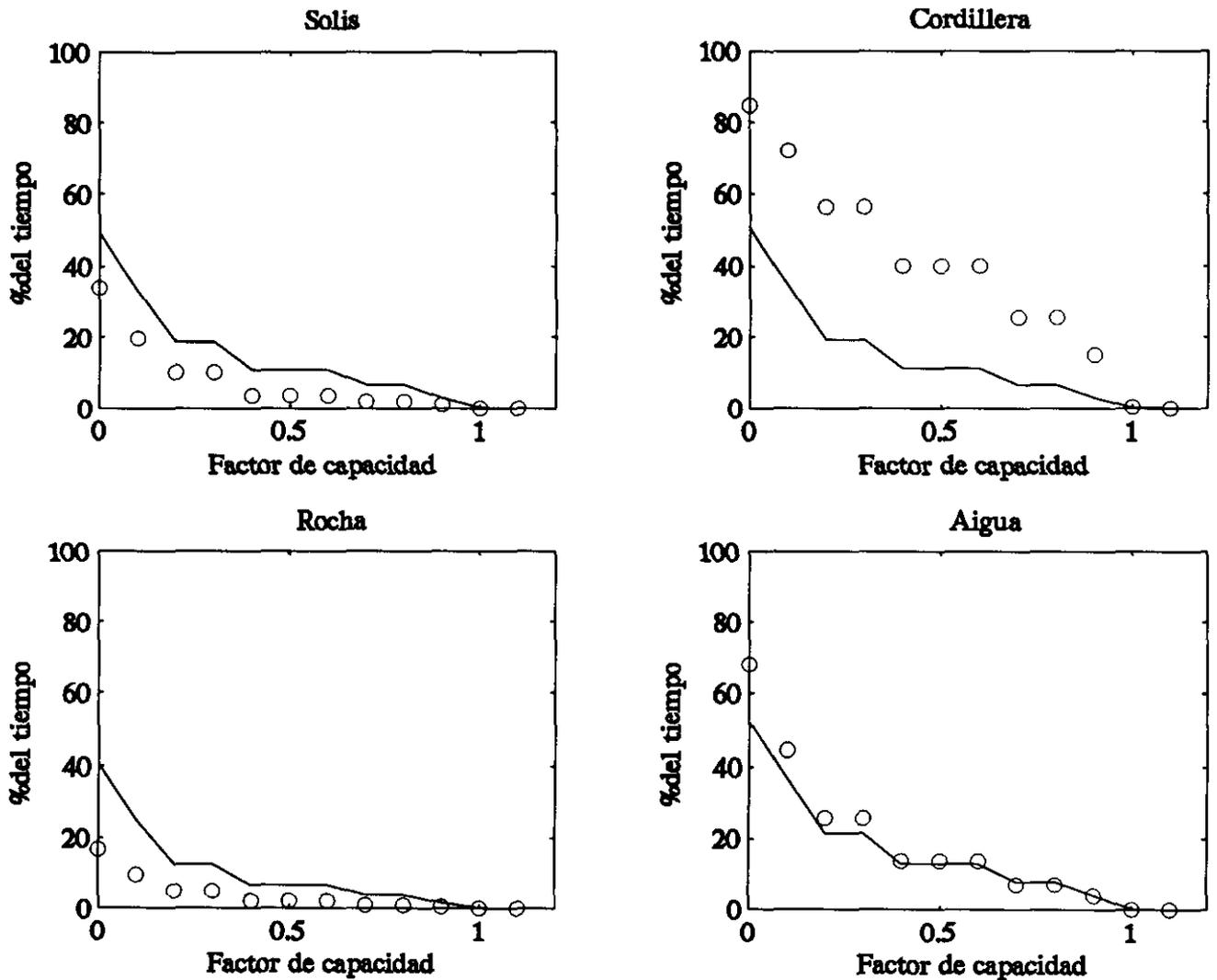


Fig. 4.36 Comparación de las curvas de duración del factor de capacidad calculados vs. medidos en las estaciones testigo utilizadas en el proceso de calibración automática. Topografía definida cada 15 km

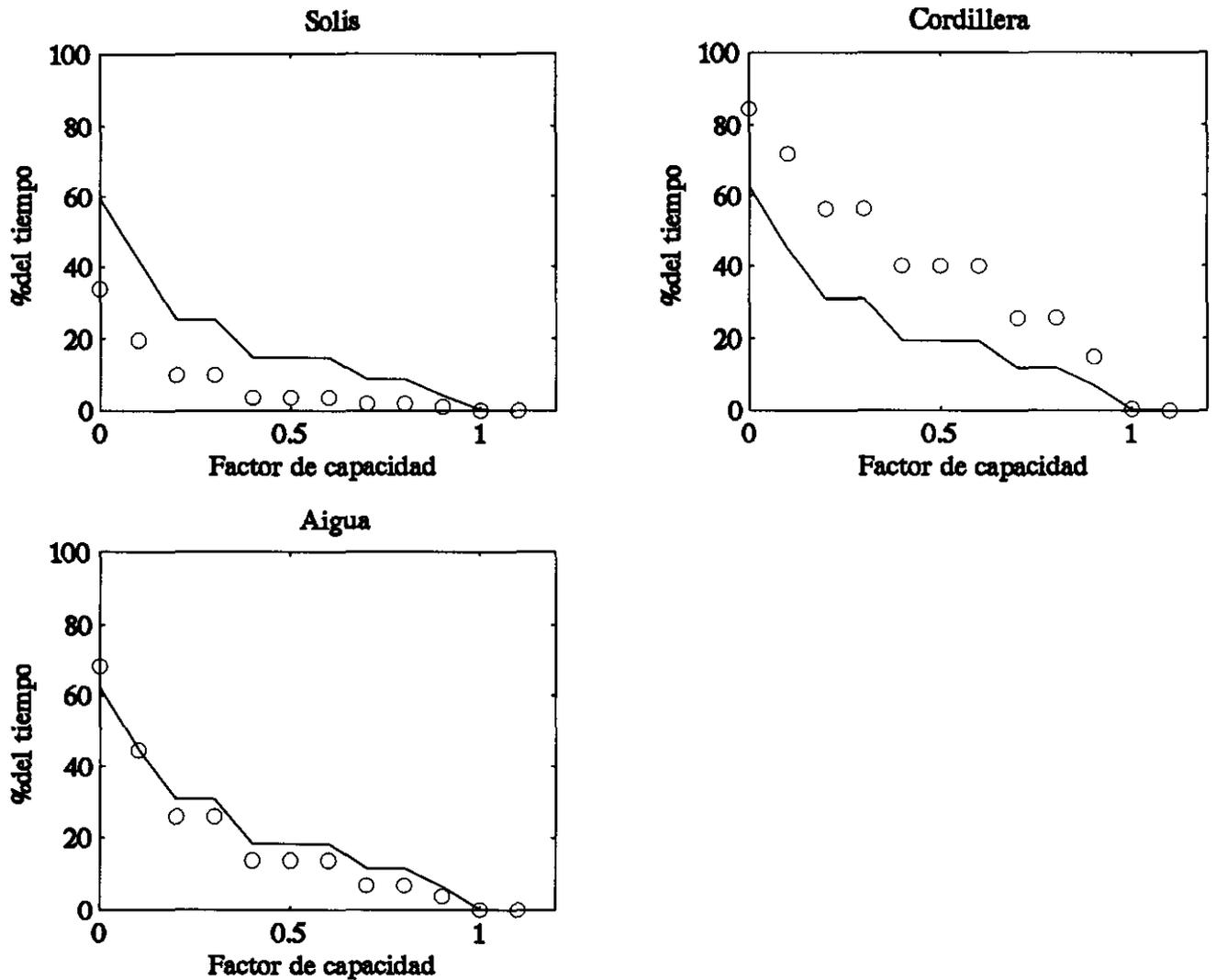


Fig. 4.37 Comparación de las curvas de duración del factor de capacidad calculados vs. medidos en las estaciones testigo utilizadas en el proceso de calibración automática. Topografía definida cada 6 km

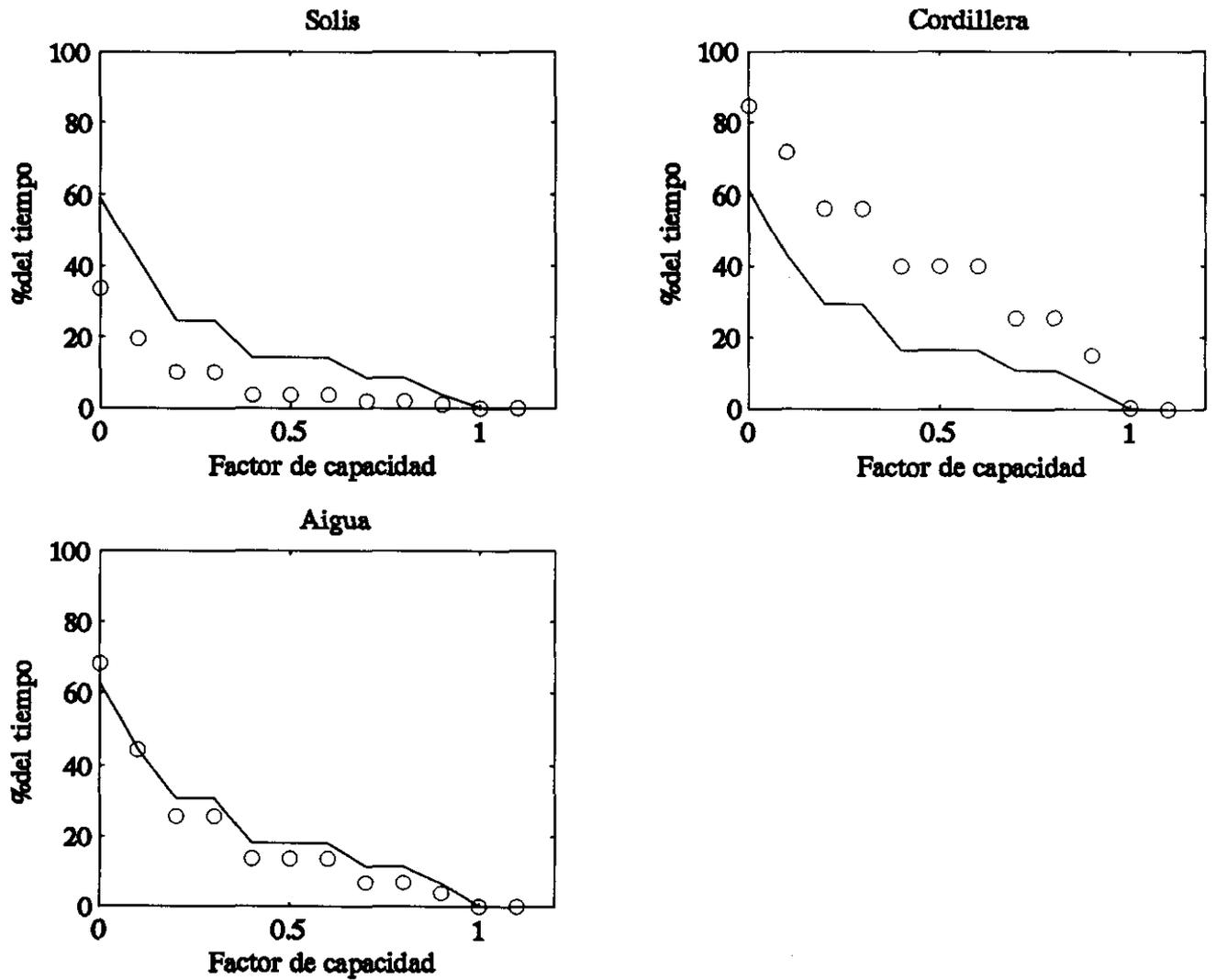


Fig. 4.38 Comparación de las curvas de duración del factor de capacidad calculados vs. medidos en las estaciones testigo utilizadas en el proceso de calibración automática. Topografía definida cada 4 km

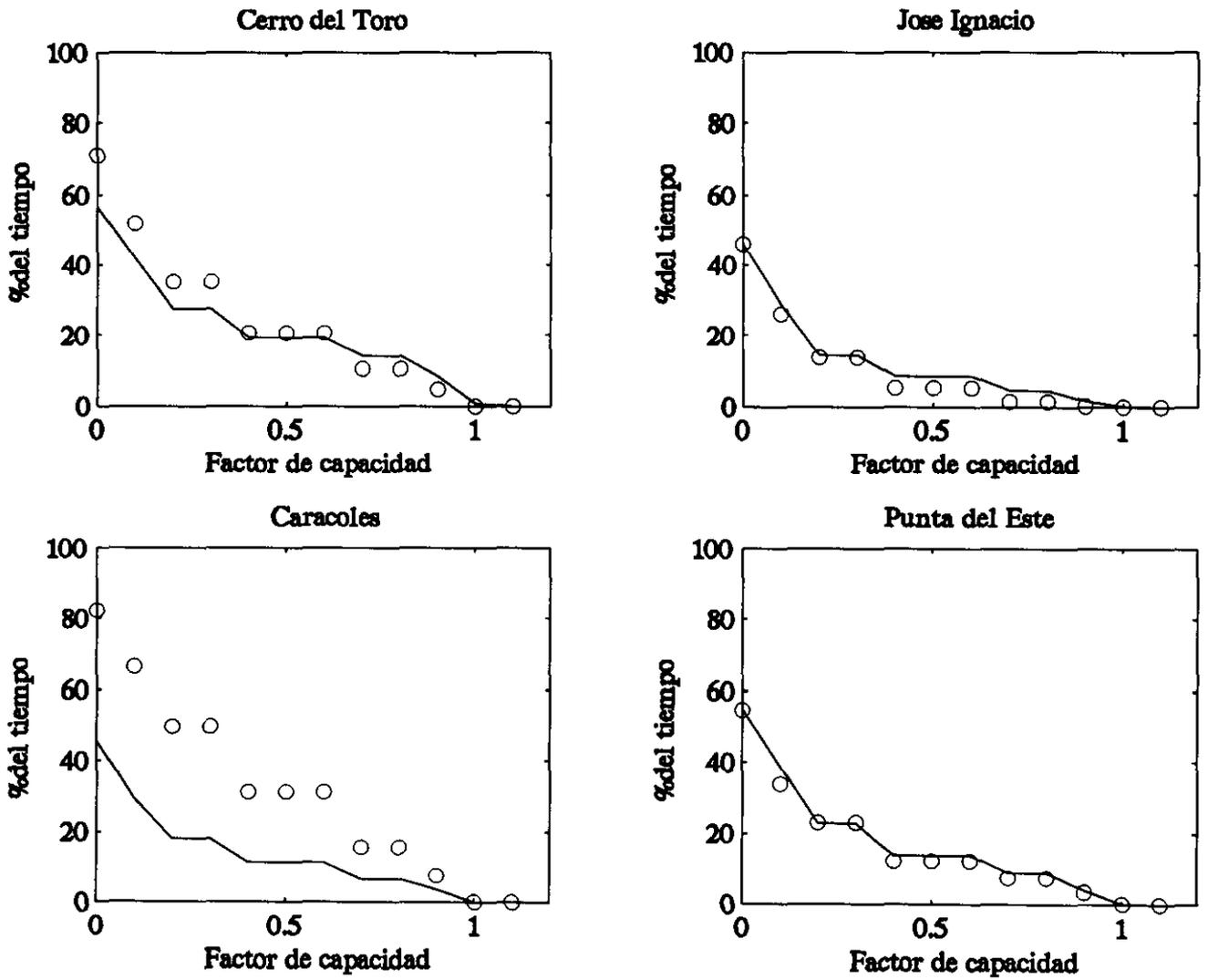


Fig. 4.39 Comparación de las curvas de duración del factor de capacidad calculados vs. medidos en las estaciones testigo no utilizadas en el proceso de calibración automática. Topografía definida cada 60 km

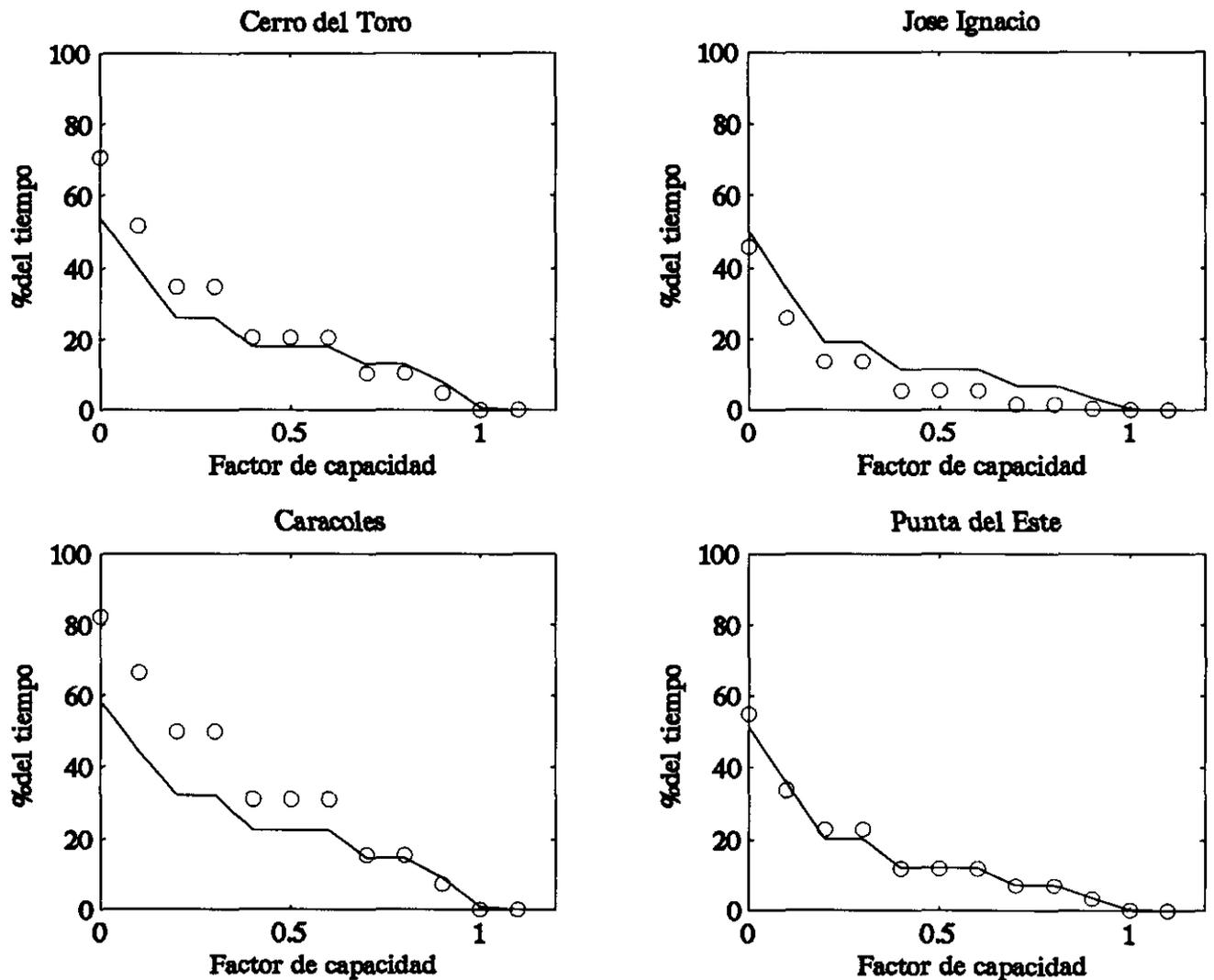


Fig. 4.40 Comparación de las curvas de duración del factor de capacidad calculados vs. medidos en las estaciones testigo no utilizadas en el proceso de calibración automática. Topografía definida cada 30 km

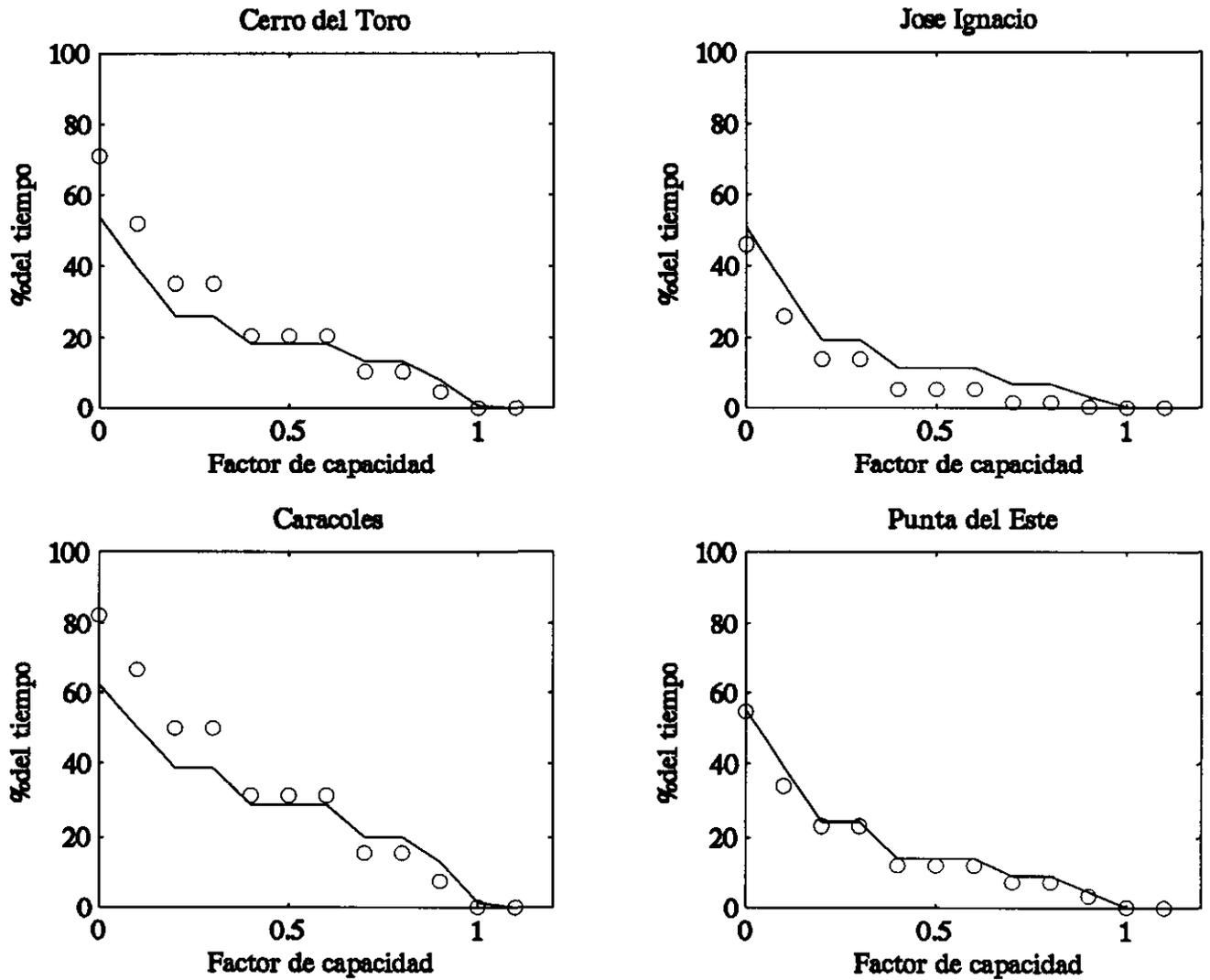


Fig. 4.41 Comparación de las curvas de duración del factor de capacidad calculados vs. medidos en las estaciones testigo no utilizadas en el proceso de calibración automática. Topografía definida cada 15 km

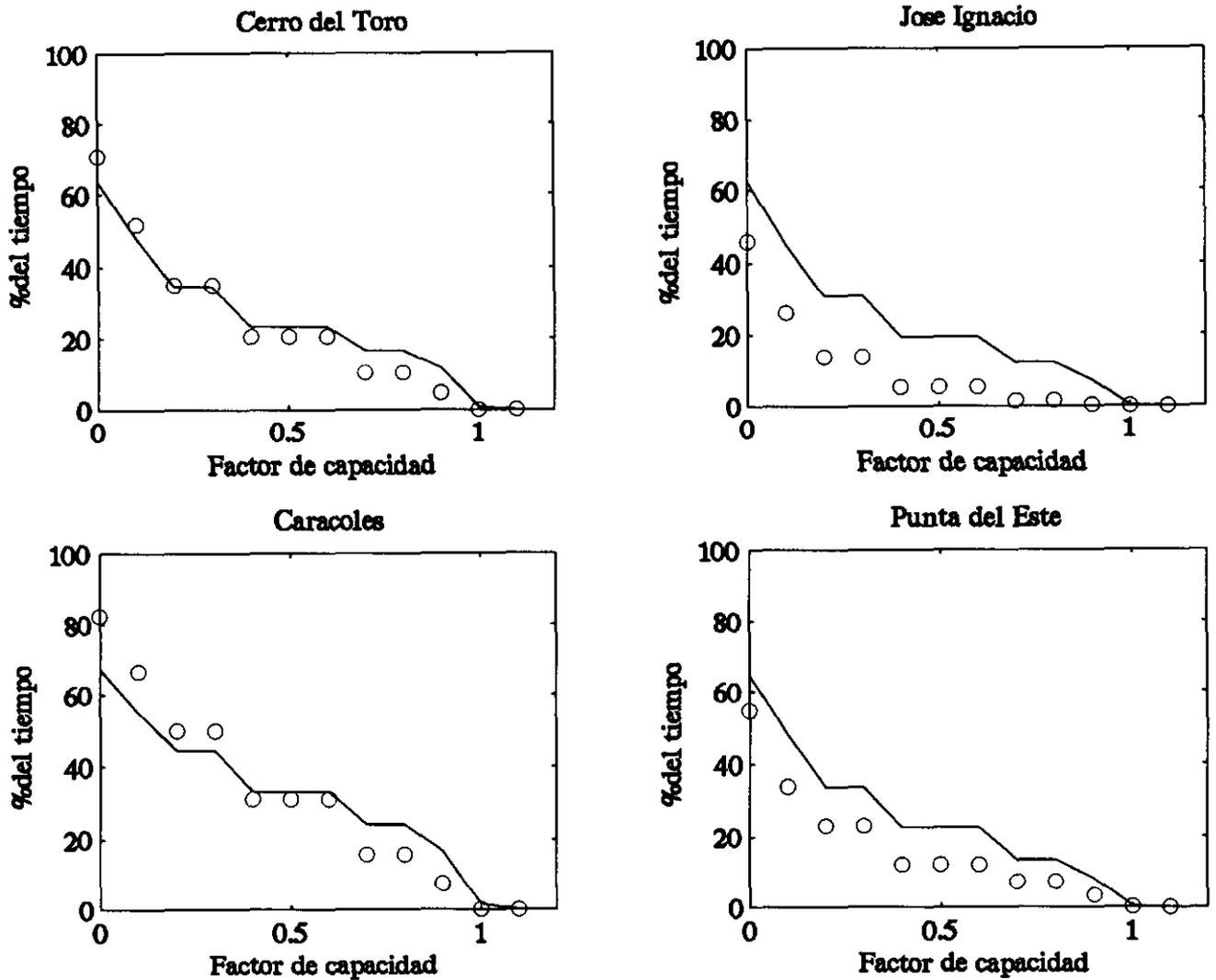


Fig. 4.42 Comparación de las curvas de duración del factor de capacidad calculados vs. medidos en las estaciones testigo no utilizadas en el proceso de calibración automática. Topografía definida cada 6 km

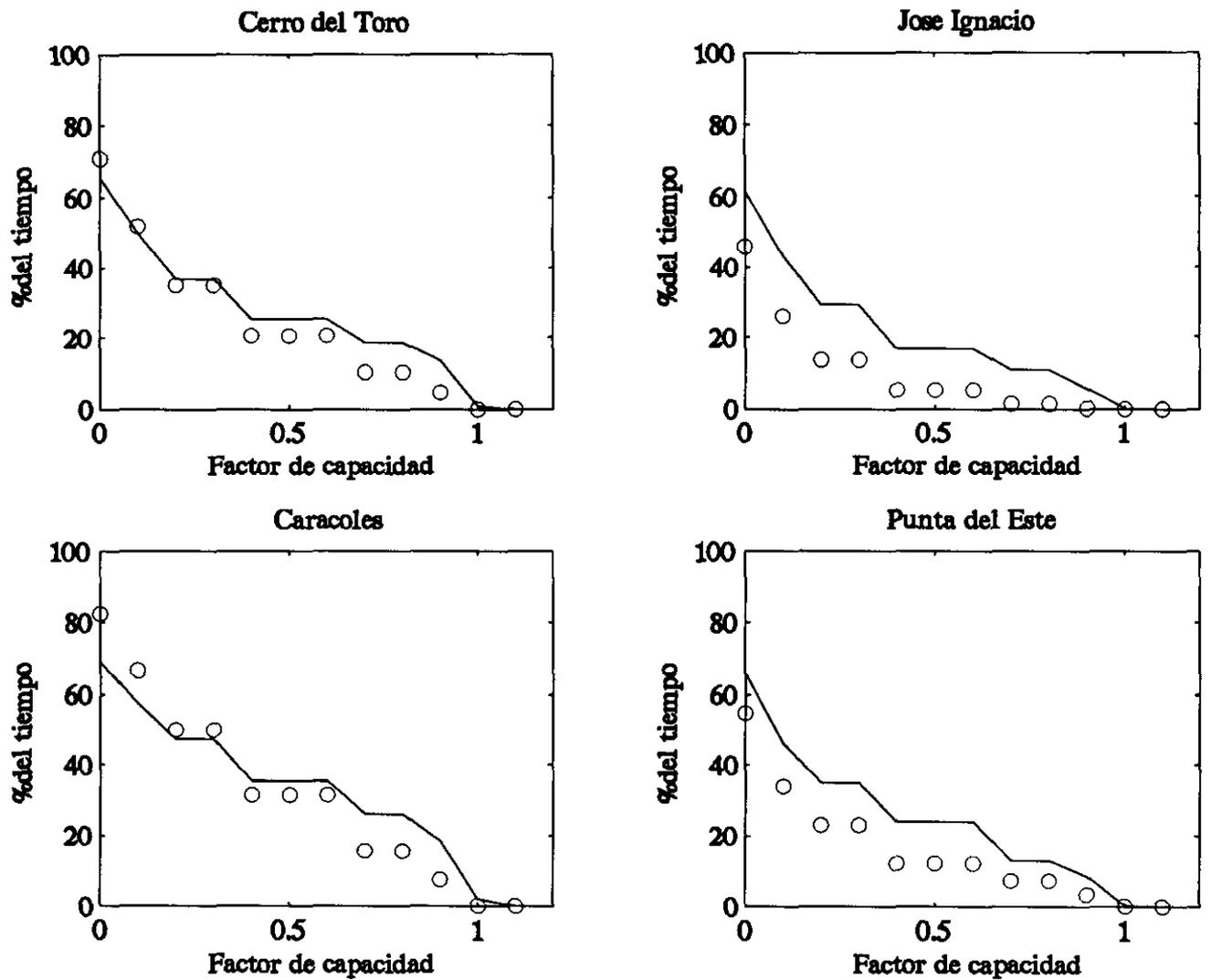


Fig. 4.43 Comparación de las curvas de duración del factor de capacidad calculados vs. medidos en las estaciones testigo no utilizadas en el proceso de calibración automática. Topografía definida cada 4 km

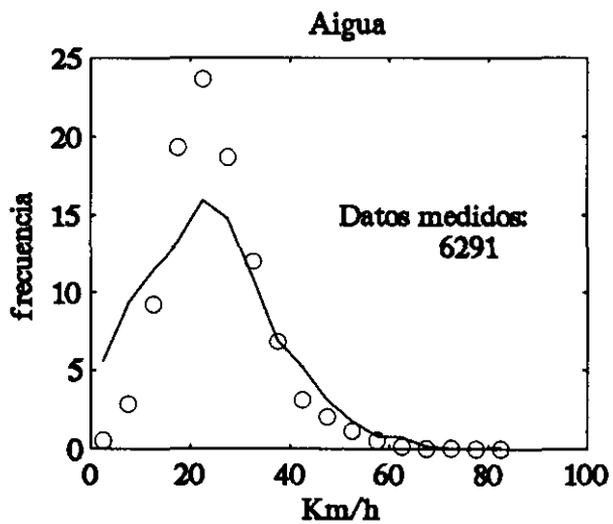
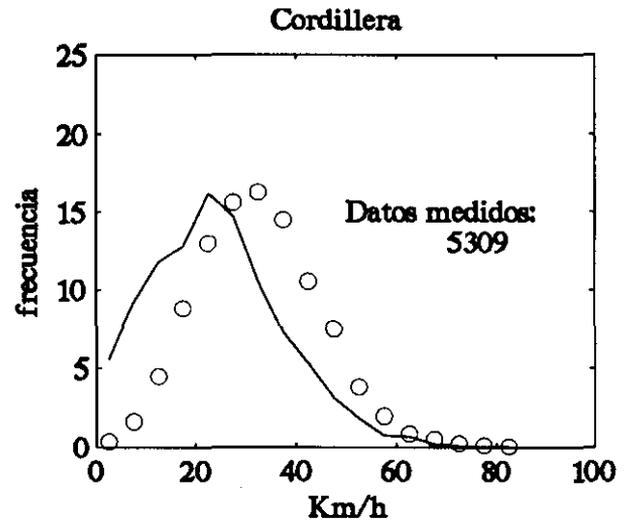
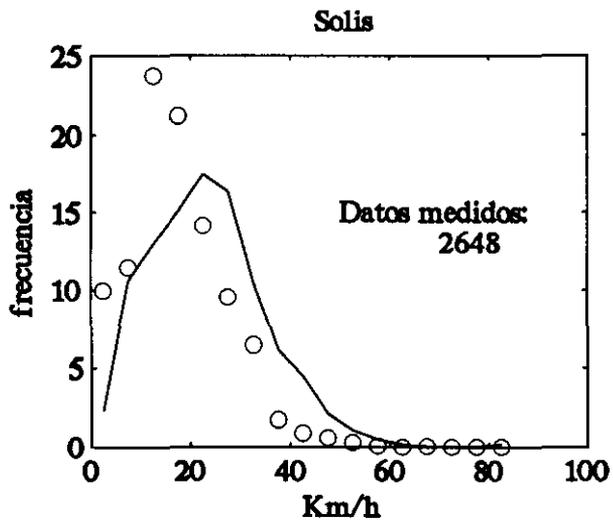


Fig. 4.44 Efecto del filtrado de los patrones de ruido en la reconstrucción del histograma de velocidades de las estaciones testigo utilizadas en la calibración. Se utilizaron 5 de 10 términos posibles. Topografía definida cada 6 km.

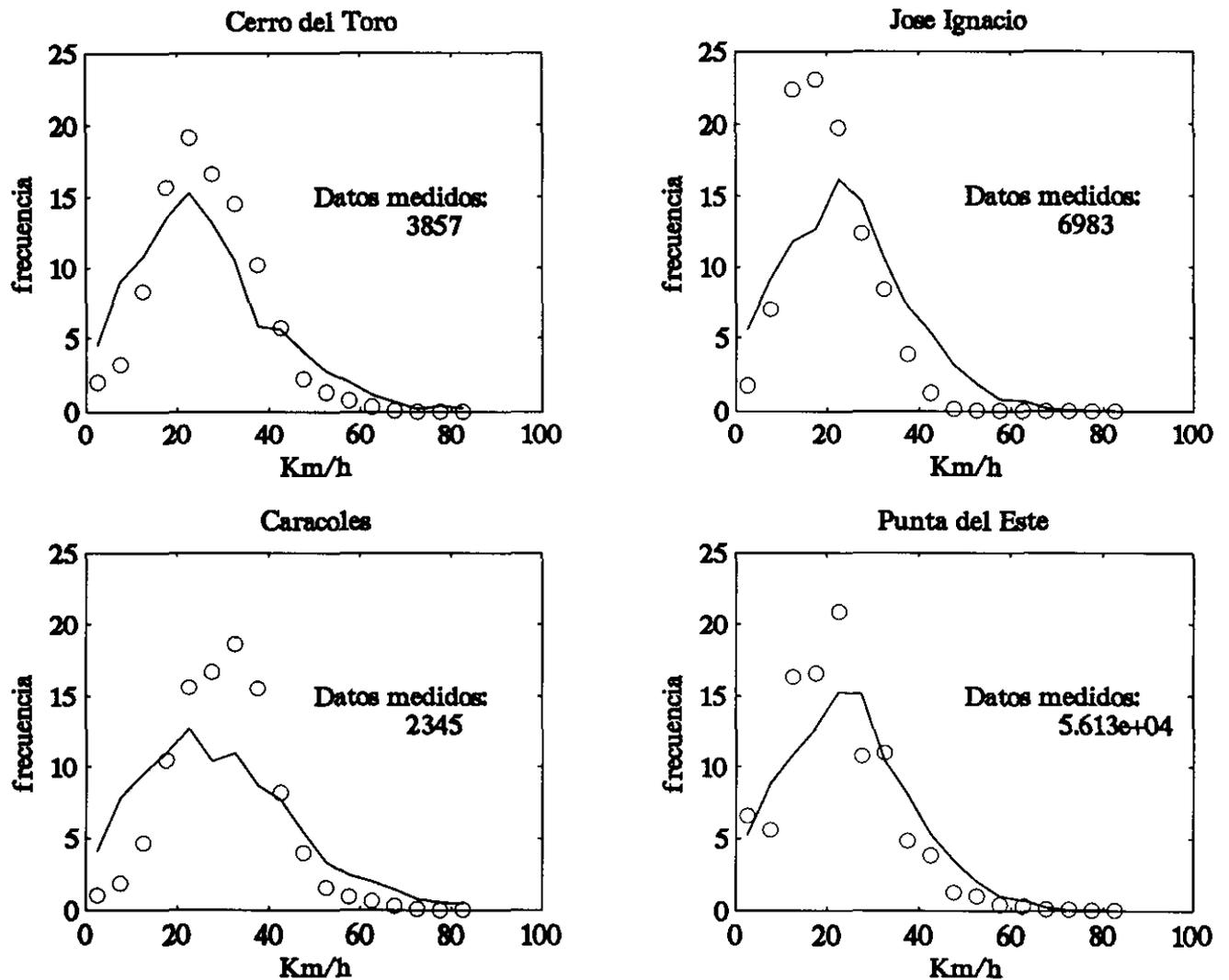


Fig. 4.45 Efecto del filtrado de los patrones de ruido en la reconstrucción del histograma de velocidades de las estaciones testigo no utilizadas en la calibración. Se utilizaron 5 de 10 términos posibles. Topografía definida cada 6 km.

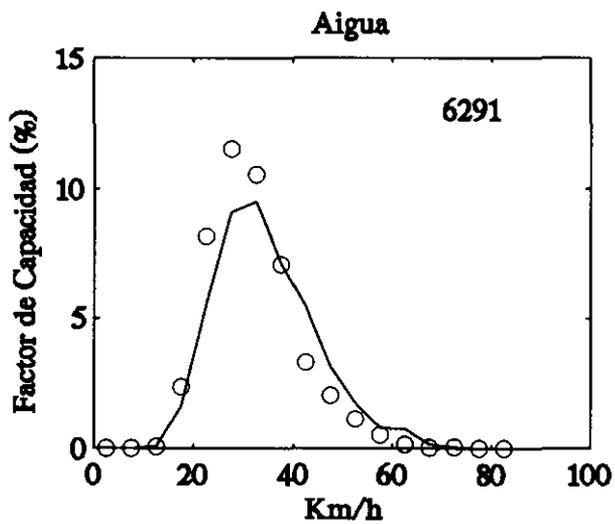
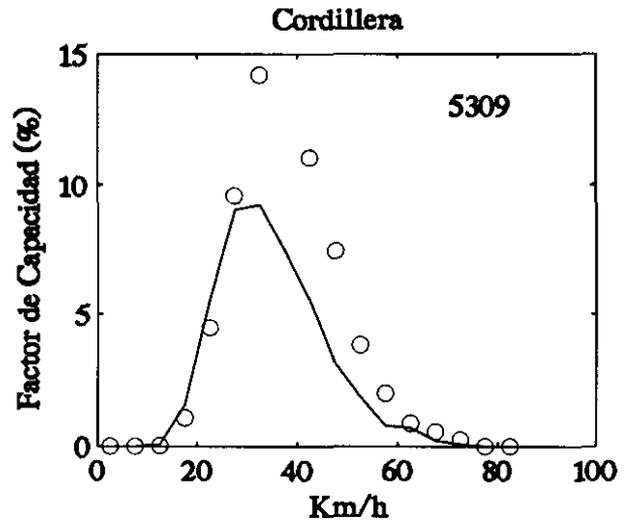
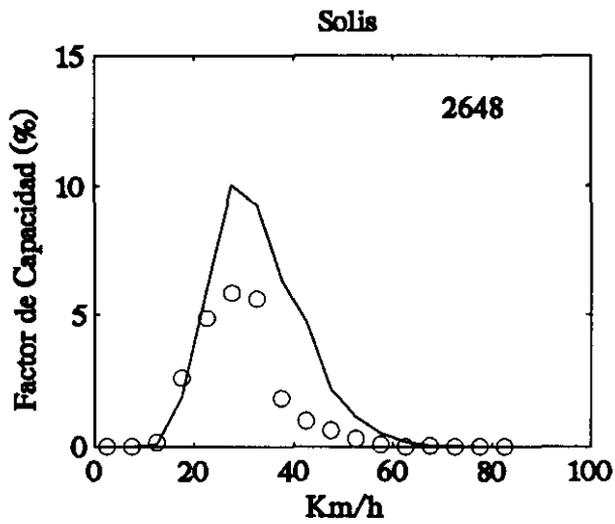


Fig. 4.46 Efecto del filtrado de los patrones de ruido en la reconstrucción del histograma del factor de capacidad en las estaciones testigo utilizadas en la calibración. Se utilizaron 5 de 10 términos posibles. Topografía definida cada 6 km.

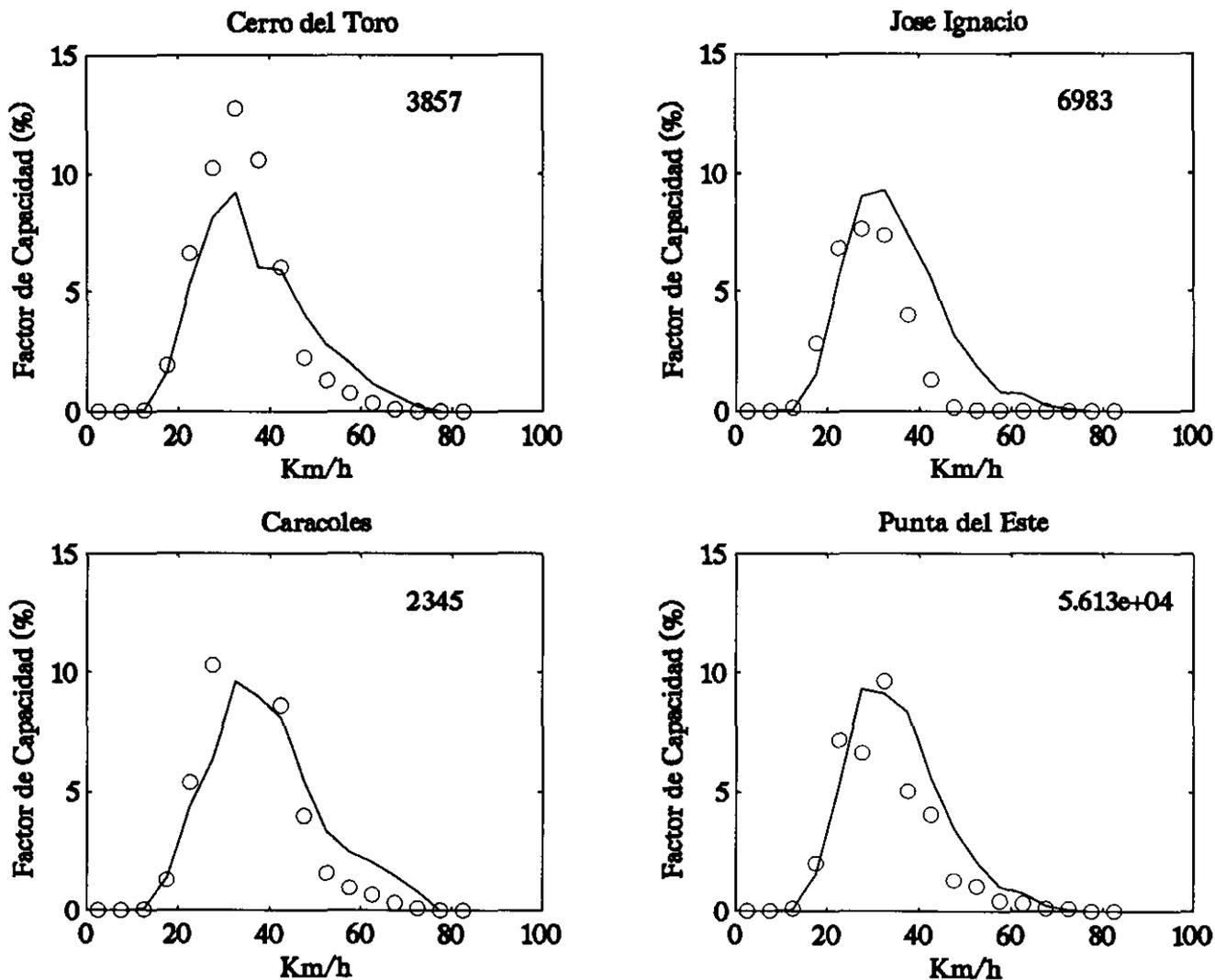


Fig. 4.47 Efecto del filtrado de los patrones de ruido en la reconstrucción del histograma del factor de capacidad en las estaciones testigo no utilizadas en la calibración. Se utilizaron 5 de 10 términos posibles. Topografía definida cada 6 km.

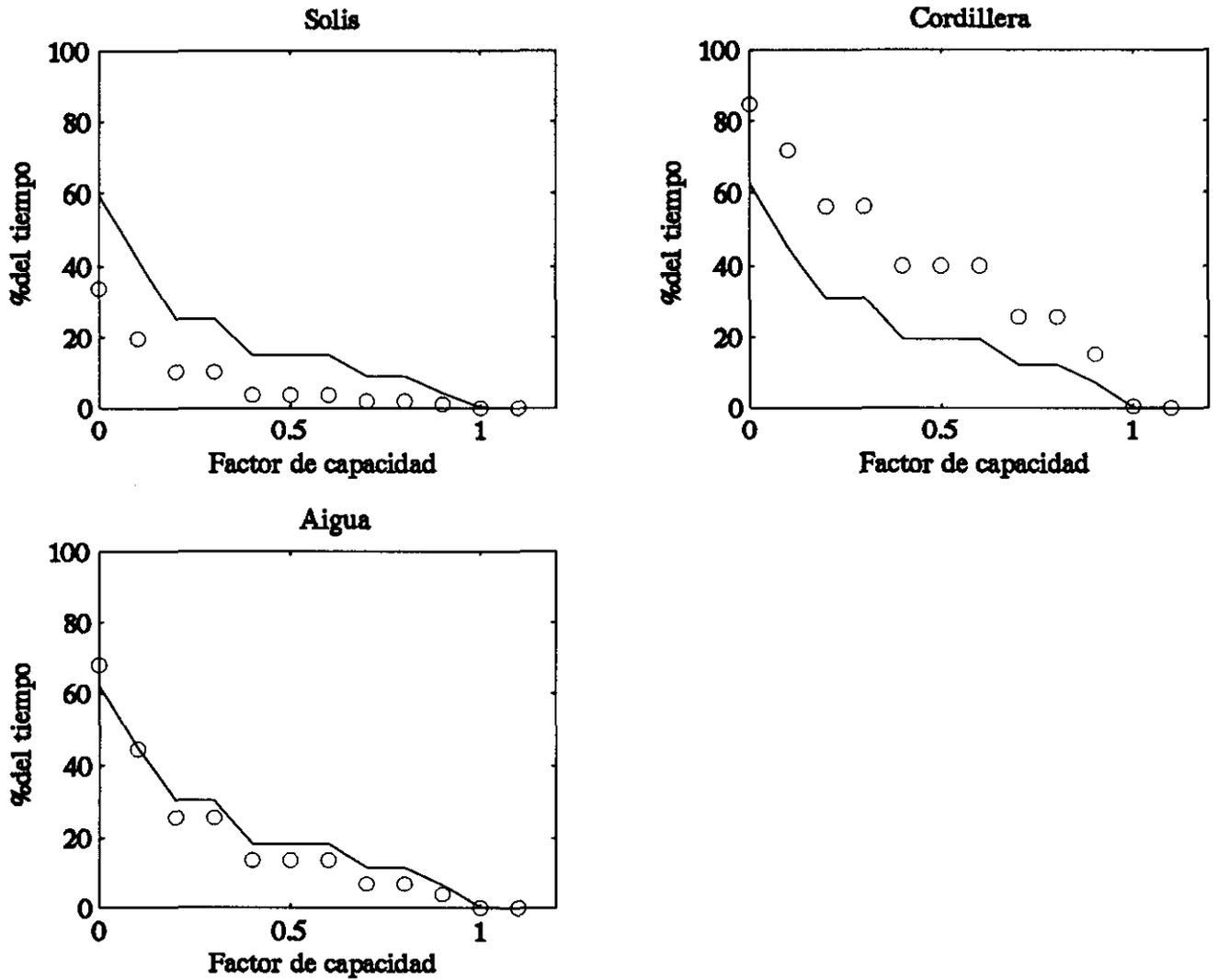


Fig. 4.48 Efecto del filtrado de los patrones de ruido en la reconstrucción de la curva de duración del factor de capacidad en las estaciones testigo utilizadas en la calibración. Se utilizaron 5 de 10 términos posibles. Topografía definida cada 6 km.

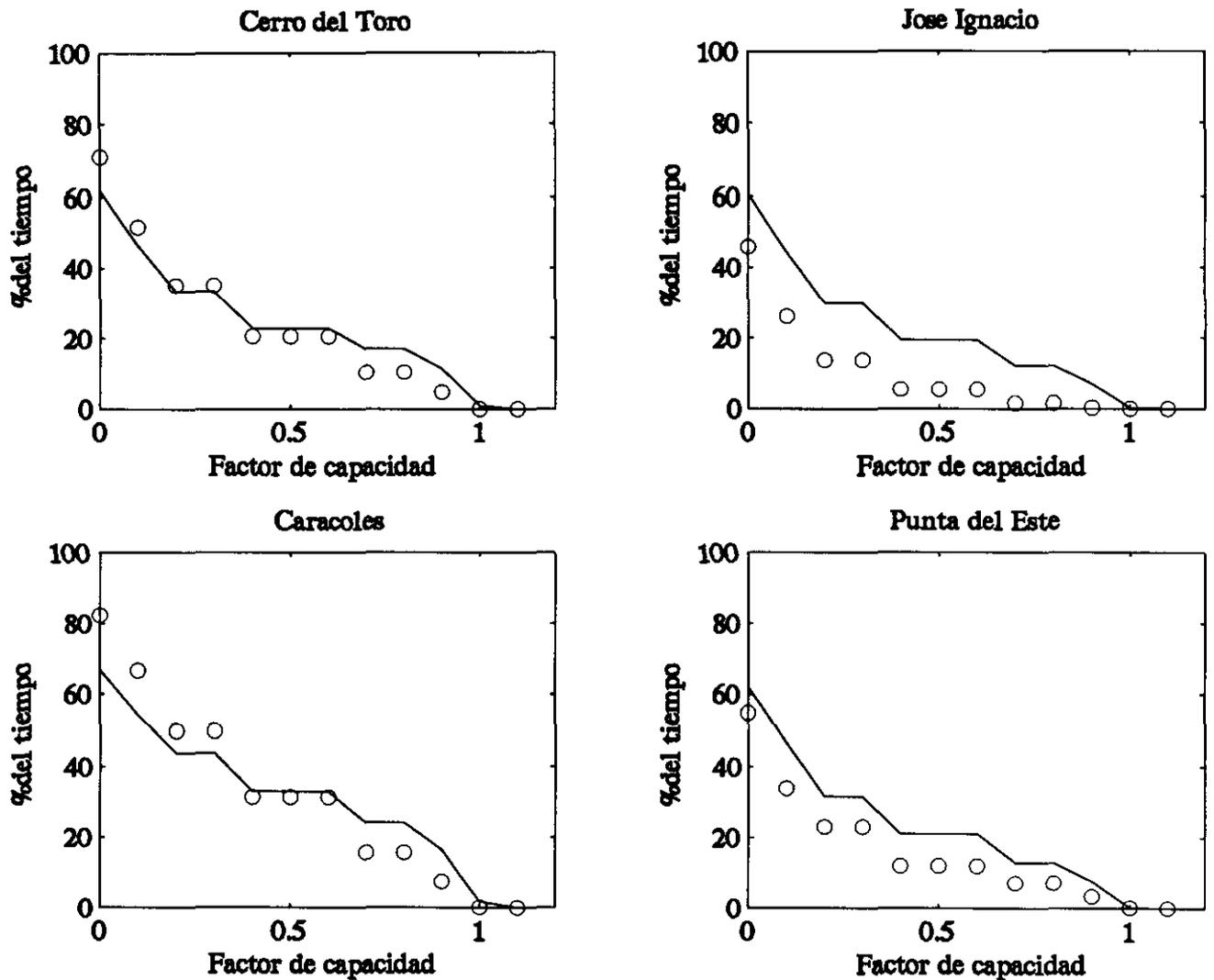


Fig. 4.49 Efecto del filtrado de los patrones de ruido en la reconstrucción de la curva de duración del factor de capacidad en las estaciones testigo no utilizadas en la calibración. Se utilizaron 5 de 10 términos posibles. Topografía definida cada 6 km.

#### 4.1.6 Ajuste obtenido en las series temporales

A diferencia de todos los autores consultados, se intentó comparar las series temporales medida y calculadas. En el informe de Briozzo et al., 1993 se presenta una ampliación de los resultados preliminares que se expondrán a continuación.

En la fig. 4.50 se muestra la frecuencia en función de la velocidad diferencia entre los módulos medidos y calculados. Esa diferencia se ha tomado en valor absoluto. Téngase en cuenta a la hora de analizar esos resultados que los instrumentos utilizados como dato de partida (o sea los operados por la DNM) tienen típicamente los registros discretizados alrededor de múltiplos de 5 km/h (Barros, 1990). En todos los casos, la probabilidad de errar por 5 km/h en el cálculo es del orden del 12%.

Tampoco se ha realizado una depuración de los datos de las estaciones automáticas, como sí se ha hecho (ver Briozzo et al., 1993) con las 5 estaciones tomadas como base del cálculo, para el período considerado. Ello si bien deseable ha estado por fuera de los objetivos de este trabajo.

#### 5. CONCLUSIONES

Se han presentado los resultados del trabajo de modelación numérica del campo de velocidades de viento en superficie, para la zona sur de Uruguay.

La modelación utilizada, basada en la interpolación objetiva de los datos meteorológicos de rutina disponibles y un ajuste automático de forma de producir un campo solenoidal, se encuentra en la bibliografía consultada. Sin embargo, no han sido implementadas.

Además, se ha utilizado un programa de modelación bastante elaborado. El mismo está basado en el método de los elementos finitos, habiéndose seleccionado funciones de forma isoparamétricas, para elementos de 8 nodos.

Los resultados obtenidos, si bien no concluyentes, pueden calificarse de alentadores. No todas las combinaciones de resultados han podido presentarse, por el gran número de casos que ello implica.

Las aplicaciones del modelo elaborado, en conjunto con el uso de modelos físicos para resolver en las escalas menores del flujo, han probado ser en conjunto una herramienta poderosa, capaz de predecir adecuadamente la energía disponible en zonas de topografía compleja y algo compleja. Se entiende por tal en el Uruguay a serranías y cerros de altura no superior a los 500 m.

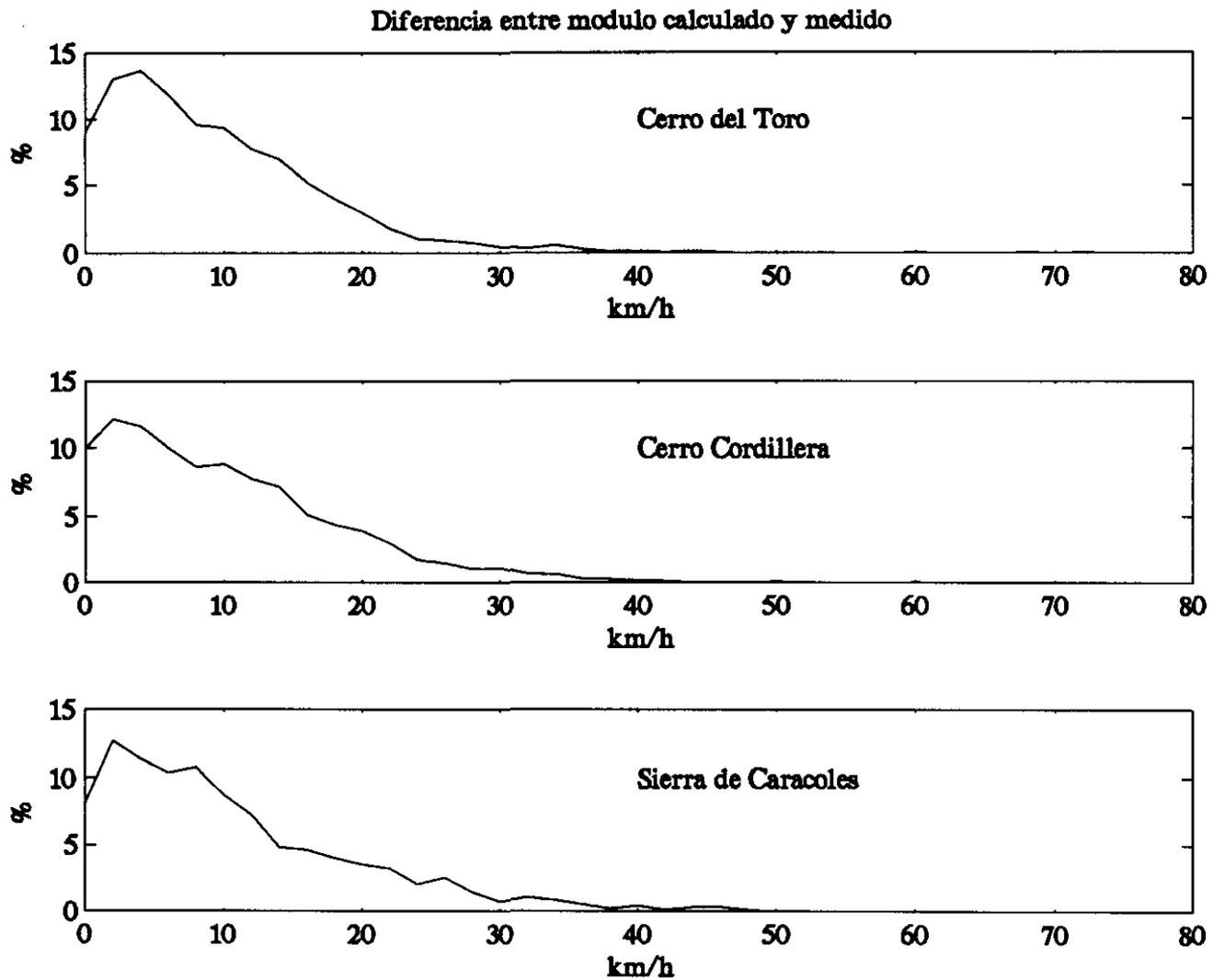


Fig. 4.50 Comparación entre los módulos de velocidad medidos y calculados para el mismo instante

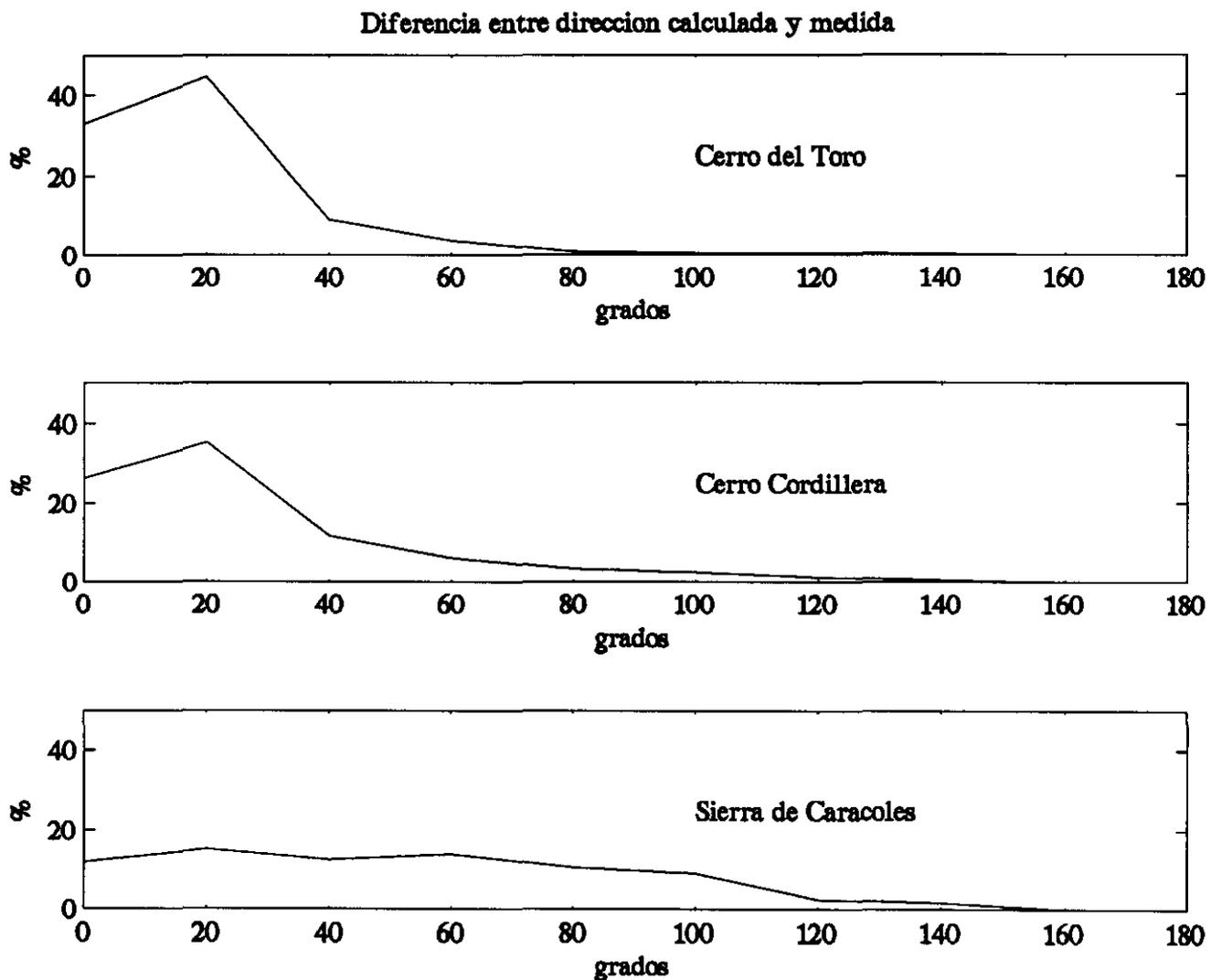


Fig. 4.51 Histograma del error en dirección entre la velocidad medida y calculada para el mismo instante

Las aplicaciones del modelo elaborado, en conjunto con el uso de modelos físicos para resolver el las escalas menores del flujo, han probado ser en conjunto una herramienta poderosa, capaz de predecir adecuadamente la energía disponible en zonas de topografía compleja y algo compleja. Se entiende por tal en el Uruguay a serranías y cerros de altura no superior a los 500 m.

El conjunto de programas FORTRAN excede de las 15000 líneas de código fuente. No se han contabilizado las requeridas en MATLAB.

## 6. REFERENCIAS Y AGRADECIMIENTOS

A lo largo de todo este trabajo, mucha gente tuvo participación tanto directa como ocasional. Han sido entre otros a los Ings. Ruben Cabrera y Fernando Martínez, con la implementación de partes del preprocesamiento de datos sobre el mainframe; ya en el ambiente UNIX, la migración del paquete gráfico al ambiente MATLAB es debida al Ing. Horacio Cosentino. El Ing. Elías Kaplan implementó a su vez las rutinas de control de calidad de datos, utilizadas en el proyecto. La colaboración de todos ellos ha sido usada en parte en esta tesis, y se deja aquí constancia.

Se debe destacar la participación no evidente del A/P Juan González, al introducir pacientemente al autor en los misterios del sistema operativo del equipo IBM 4341 y nunca perdersnos la fe; al M.Sc. Ing. José Cataldo, por muchas cosas; al Dr. Ing. Rafael Guarga, por haber brindado la influencia más profunda en nuestra formación, y haberse arriesgado a inventar la carrera.

También se desea expresar el agradecimiento al Dr. Vicent Espert, por haber aceptado participar de esta quijotada.

A mi esposa e hijos, por esperar siempre pacientemente.

## REFERENCIAS

- Anónimo, Dirección Nacional de Meteorología, 1970.
- Barros, V., 1986. "Proyecto IMBESE: Información Meteorológica básica para el estudio de la Energía Solar y Eólica" Proyecto PNUD/OMM/URU/82/021, Diciembre 1986.
- Barros, V. and Estevan, E., 1983. "On the evaluation of Wind Power from short wind records." *J. Appl. Meteorol.*, 22, 6, 1116-1123.
- Barros, V., and Rodríguez Seró, J.A. 1981. "Measurements strategies: Use of short observation records for estimating the annual wind variation." *Proc. Int. Colloquium on Wind Energy, BHRA Fluid Engineering. Brighton, U.K.* 23-28.
- Bhumralkar, C.M., Mancuso, R.L., Ludwig, F.L., and Renne, D.S. 1980: "A Practical and Economic Method for estimating wind Characteristics at Potential Wind Energy Conversion Sites" , *Solar Energy*, 25, 55-66.
- Briozzo, C.; Cataldo, J.; Nunes, V.; Alonso, J; Acosta, A.; Penza, E.; Chaer, R.; Lamas, R.; López, C.; Cosentino, H. y Kaplan, E., 1993. "Segundo Proyecto de Evaluación del Potencial Eólico Nacional: Informe Final" Facultad de Ingeniería, Instituto de Mecánica de los Fluidos e Ingeniería Ambiental, Instituto de Ingeniería Eléctrica y Centro de Cálculo, Montevideo, Uruguay.
- Cambilargiu, E. 1963. "Primer mapa isoviento del Uruguay, Tablas y diagramas de 26 estaciones" *Boletín de la Facultad de Ingeniería y Agrimensura, Montevideo, Uruguay*, Nov. 1963.
- Cisa, A.; Guarga, R.; Briozzo, C.; López, C.; Alonso, J; Cataldo, J.; Canetti, R.; Acosta, A.; Penza, E.; Xavier, V.; Tozzo, A.; Estrada, J.; Bevc, A.; Maggiolo, G.; Chaer, R.; Rosenblatt, R.; Lamas, R.; Martínez, F. y Cabrera, R., 1990. "Proyecto de Evaluación del Potencial Eólico Nacional: Informe Final" Facultad de Ingeniería, Instituto de Mecánica de los Fluidos e Ingeniería Ambiental e Instituto de Ingeniería Eléctrica, Montevideo, Uruguay.
- Dickerson, M.H., 1978. "MASCON - A Mass Consistent Atmospheric Flux Model for Regions With Complex Terrain" *J. Appl. Meteor.*, V 17, N 3, March 1978, 241-253.
- Druyan, L. 1985. "Wind climate studies for WECS siting", *J. of Climatology.*, 5, 95-105.

Endlich, R.M. and Clark, J.R., 1963: "Objective analysis of some meteorological quantities", *J. Appl. Meteorol.*, V 2, February 1963, 66-81.

Endlich, R.M., Ludwig, F.L., Bhumralkar, C.M., and Estoque, M.A. 1980: "A Practical method for estimating wind characteristics at potential wind energy conversion sites", Prepared for Pacific Northwest Laboratory, under agreement B-23149-A-L. PNL 3808, 1980. SRI International.

Endlich, R.M., Ludwig, F.L., Bhumralkar, C.M., and Estoque, M.A. 1982: "A Diagnostic model for Estimating winds at potential sites for wind turbines", *J. Appl. Meteorol.*, 21, 1441-1454.

Endlich, R.M. and Lee, J., 1983. "An Improved Diagnostic Model for Estimating Wind Energy". *SRI Project 4292*. Prepared for Pacific Northwest Laboratory. PNL 4256.

Erasmus, D.A., 1986. "A Model for Objective Simulation of Boundary Layer Winds in an Area of Complex Terrain". *J. Appl. Met.*, V 25, December 1986, 1832-1841.

Ferragut, L.; Montero, G.; Winter, G. and Montenegro, R. 1990. "Wind Field Adjustment: Resolution by Adaptive Mixed Finite Element Method and Multigrid Algorithm" *Proceedings of the European Community Wind Energy Conference, Madrid, Spain.* pp 140-144.

Gandin, L.S., 1965: "Objective Analysis of Meteorological fields". *Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1965.* 239 pp.

Goodin, W.R.; Mc. Rae, G.J. and Seinfeld, J.H. 1980. "An Objective Analysis Technique for Constructing Three Dimensional Urban Scale Wind Field". *J. Appl. Meteor.* V 19, January 1980, 98-108.

Grace, A.; 1990. "Optimization Toolbox, for use with MATLAB". Published by The MathWorks, Inc. 82 pp.

Guo, X. and Palutikof, J.P. 1990, "A Study of Two Mass-Consistent Models: Problems and Possible Solutions" *Boundary Layer Meteorology*, 53, 303-332.

Haagenson, P.L.; Kuo, Y.; Skumanich, M and Seaman, N.L. 1987. "Tracer Verification of Trajectory Models". *J. Clim. and Appl. Meteorol.* V 26, March 1987, 410-426.

Hardy, D.M. and Walton, J.J. 1978. "Principal Components Analysis of Vector Wind Measurements" *J. Appl. Meteorol.*, V 17, August 1978, 1153-1162.

Hanna, H. 1982. In "Atmospheric Turbulence and Air Pollution Modelling" A course held in The Hague, 21-25 Sept. 1981. Edited by F.T. Nieuwstadt and H. Van Dop. D. Reidel Publishing Co. pp 307-310.

Hino, M. and Men, Y. 1991. "Stereoscopic imaging technique of instantaneous 3-dimensional velocity fields from sparse and insufficient velocity data.- Application to turbulent structure of an oscillatory flow". *Proceedings of 24<sup>th</sup> IAHR Congress, Madrid, 1991.* 8 pp.

Hino, M. 1992. Comunicación personal.

Hirsch, C. 1988. "Numerical Computation of internal and external Flows. Vol. 1, Fundamentals of Numerical Discretization". Ed. John Wiley and Sons.

Hennessey, J. 1977. "Some aspects of Wind Power Statistics". *J. Appl. Meteorol.*, V 16, N 2, 119-128.

Kahl, J.D. and Samson, P.J., 1986. "Uncertainty in Trajectory Calculations Due to Low Resolution Meteorological Data". *J. Appl. Meteorol.*, Vol 25, December, 1816-1831.

Kahl, J.D. and Samson, P.J., 1988. "Shear effects on wind interpolation accuracy". *J. Appl. Meteorol.*, Vol 27, November, 1299-1301.

Klink, K. and Willmot, C.J., 1988. "Principal Components of The Surface Wind Field in The United States: a Comparison of Analysis Based Upon Wind Velocity, Direction and Speed" *International Journal of Climatology*, V 9, 293-308

Johnson, G.T. 1982. "Climatological Interpolation Functions for Mesoscale Wind Fields". *J. Appl. Meteorol.*, V 21, N 8, 1130-1136.

Leahey, D.M., Hansen, M.C. and Shroeder, M.B., 1989. "Horizontal Variability in 10 m Wind Velocities as Observed at Two Praire Sites Separated by a Distance of 7.5 km" *J. Appl. Meteorol.*, V 28, November 1989, 1147-1154.

Lebart, L.; Morineau, A.; Tabard, N. 1977. "Techniques de la Description Statistique: Méthodes et logiciels pour l'analyse des grands tableaux". Ed. Dunod, Paris. 344 pp.

Liu, C.Y. and Goodin, W.R. 1976. "An Iterative Algorithm for Objective Wind Field Analysis". *Mon. Wea. Rev.* V 104, June 1976, 784-792.

Little, J. and Shure, L. 1988. "Signal Processing Toolbox for use with MATLAB". Published by The MathWorks, Inc. 165 pp.

López, C. y Acosta, A., 1989 "Influencia del entorno en las medidas de la velocidad del viento: estudio preliminar" Informe interno, Facultad de Ingeniería, IMFIA

Ludwig, F.L. and Byrd, G. 1980. "An efficient method for deriving mass-consistent flow fields from wind observations in rough terrain", *Atmos. Environ.*, 14, 585-587.

Milne-Thompson, L.M. 1949. "Theoretical Hydrodynamics" 2da. Edición, Mac Millan & Co.

Moussiopoulos, N.; Flassak, Th. and Knittel, G. 1988. "A refined diagnostic Wind Model". *Environmental Software*, V 3, N 2, 85-94.

Pedlosky, J. 1987 "Geophysical Fluid Dynamics" 2<sup>da</sup> Edición. Ed. Springer Verlag. 710 pp.

Petersen, E.L., Troen, I., Frandsen, S. and Hedegaard, K. 1981 "Danish Wind Atlas (a Rational Method of Wind Energy Siting)" *RISO National Laboratory R-428*.

Ratto, C.F.; Festa, R.; Nicora, O.; Mosiello, R.; Ricci, A.; Lalas, D.P. and Frumento, O.A. 1990. "Wind Field Numerical Simulations: a New User Friendly Code". *Proceedings of the European Community Wind Energy Conference, Madrid, Spain.* pp 130-134.

Richman, M.B. 1986. "Rotation of principal components" *J. Climatology* V 6, pp 293,335

Ross, D.G.; Smith, I.N.; Manins, P.C. and Fox, D.G. 1988. "Diagnostic Wind Field Modelling for Complex Terrain: Model Development and Testing". *J. Appl. Meteorol.* V 27, July 1988, 735-796.

Sasaki, Y., 1970. "Some Basic Formalisms in Numerical Variational Analysis". *Mon. Wea. Rev.*, V 98, N12, December 1970, 875-883.

Sherman, C., 1978: "A mass-Consistent Model for Wind Fields over Complex Terrain", *J. Appl. Meteorol.*, 17, 312-319.

Silveira, L.; López, C.; Genta, J.L.; Curbelo, R.; Anido, C.; Goyret, J.; de Santos, J.; González, J.; Cabral, A.; Cajelli, A., Curcio, A., 1991. "Modelo matemático hidrológico de la cuenca del Río Negro" Informe final. Parte 2, Cap.2; 83 pp.

Timoshenko, S. y Woinowsky-Krieger, 1975. "Teoría de placas y láminas". Ed. Urmo.

Tombrou, M. and Lalas, D.P., 1990. "A telescoping procedure for local Wind Energy Potential Assesment". *Proceedings of the European Community Wind Energy Conference, Madrid, Spain.* pp 66-70.

Traci, R.M., Phillips, G.T. and Patnaik, P.C., 1978. "Developing a Site Selection Methodology for Wind Energy Conversion Systems". Science Applications, Inc. Prepared for the United States Department of Energy, September 1978, DOE/ET/20280-3.

Trifonopoulos, D. and Bergeles, G. 1990. "Wind Energy Potential Over the Evia Wind Park - Greece" *Proceedings of the European Community Wind Energy Conference, Madrid, Spain.* pp 135-139.

ANEXO 1:

Derivacion de las ecuaciones de trabajo en coordenadas conformes, segun la expresion de Traci

Sea una función  $f(x,y,z)$  cuyas derivadas parciales se desean expresar en el espacio  $(\xi, \vartheta, \sigma)$ .

Las relaciones entre las coordenadas  $(x,y,z)$  y las  $(\xi, \vartheta, \sigma)$  son:

$$\xi = x; \vartheta = y; \sigma = \frac{z - H}{H - h}$$

siendo  $H=H(x,y)$  y  $h=h(x,y)$ . Se definen las funciones auxiliares  $\pi = H-h$  y  $Z = \sigma(H-h) + h = \sigma\pi + h$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \xi} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial Z}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial Z}{\partial \xi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vartheta} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \vartheta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \vartheta} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \vartheta} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial Z}{\partial \vartheta} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial Z}{\partial \vartheta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \sigma} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \sigma} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \sigma} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \sigma} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial z} \pi = \pi \frac{\partial f}{\partial z} \end{aligned}$$

Sustituyendo en las anteriores expresiones, resultan

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \xi} - \frac{1}{\pi} \frac{\partial Z}{\partial \xi} \frac{\partial f}{\partial \sigma}$	$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial \sigma}$
$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \vartheta} - \frac{1}{\pi} \frac{\partial Z}{\partial \vartheta} \frac{\partial f}{\partial \sigma}$	$\frac{\partial f}{\partial \vartheta} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial \sigma}$
$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{\pi} \frac{\partial f}{\partial \sigma}$	$\frac{\partial f}{\partial \sigma} = \pi \frac{\partial f}{\partial z}$

Si se toman como funciones  $f$  las componentes  $\pi u$  y  $\pi v$ , resulta

$$\frac{\partial \pi u}{\partial \xi} = \frac{\partial \pi u}{\partial x} + \frac{\partial \pi u}{\partial z} \frac{\partial Z}{\partial \xi} = \pi \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \pi}{\partial x} + \frac{1}{\pi} \frac{\partial \pi u}{\partial \sigma} \frac{\partial Z}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial \pi v}{\partial \vartheta} = \frac{\partial \pi v}{\partial y} + \frac{\partial \pi v}{\partial z} \frac{\partial Z}{\partial \vartheta} = \pi \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial \pi}{\partial y} + \frac{1}{\pi} \frac{\partial \pi v}{\partial \sigma} \frac{\partial Z}{\partial \vartheta}$$

Sumando y aplicando la ecuación de la continuidad, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi u}{\partial \xi} + \frac{\partial \pi v}{\partial \vartheta} &= \pi \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + u \frac{\partial \pi}{\partial x} + v \frac{\partial \pi}{\partial y} + \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\partial \pi u}{\partial \sigma} \frac{\partial Z}{\partial \xi} + \frac{\partial \pi v}{\partial \sigma} \frac{\partial Z}{\partial \vartheta} \right] = \\ &= -\pi \frac{\partial w}{\partial z} + u \frac{\partial \pi}{\partial x} + v \frac{\partial \pi}{\partial y} + \frac{1}{\pi} \left[ \left( \pi \frac{\partial u}{\partial \sigma} + u \frac{\partial \pi}{\partial \sigma} \right) \frac{\partial Z}{\partial \xi} + \left( \pi \frac{\partial v}{\partial \sigma} + v \frac{\partial \pi}{\partial \sigma} \right) \frac{\partial Z}{\partial \vartheta} \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\partial w}{\partial \sigma} + u \frac{\partial \pi}{\partial x} + v \frac{\partial \pi}{\partial y} + \left[ \frac{\partial u}{\partial \sigma} \frac{\partial Z}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \sigma} \frac{\partial Z}{\partial \vartheta} \right] = u \left[ \frac{\partial \pi}{\partial \xi} - \frac{1}{\pi} \frac{\partial \pi}{\partial \sigma} \frac{\partial Z}{\partial \xi} \right] + \\
&\quad + v \left[ \frac{\partial \pi}{\partial \vartheta} - \frac{1}{\pi} \frac{\partial \pi}{\partial \sigma} \frac{\partial Z}{\partial \vartheta} \right] - \frac{\partial w}{\partial \sigma} + \left[ \frac{\partial u}{\partial \sigma} \frac{\partial Z}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \sigma} \frac{\partial Z}{\partial \vartheta} \right] = \\
&u \frac{\partial \pi}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \sigma} \frac{\partial Z}{\partial \xi} + v \frac{\partial \pi}{\partial \vartheta} + \frac{\partial v}{\partial \sigma} \frac{\partial Z}{\partial \vartheta} - \frac{\partial w}{\partial \sigma} = \\
&\frac{\partial}{\partial \sigma} \left( u \frac{\partial Z}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( v \frac{\partial Z}{\partial \vartheta} \right) - \frac{\partial w}{\partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[ u \frac{\partial Z}{\partial \xi} + v \frac{\partial Z}{\partial \vartheta} - w \right]
\end{aligned}$$

Si se define ahora la función  $\pi \tilde{\omega} \equiv u \frac{\partial Z}{\partial \xi} + v \frac{\partial Z}{\partial \vartheta} - w$ , resulta:

$$\frac{\partial \pi u}{\partial \xi} + \frac{\partial \pi v}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \pi \tilde{\omega}}{\partial \sigma} = 0 \quad (\text{A.1})$$

expresión que tiene una forma análoga a la condición de continuidad en las coordenadas  $x, y, z$ .

Obsérvese que si  $H$  es constante, entonces  $H \neq H(x, y)$  y serán:

$$\frac{\partial Z}{\partial \xi} = (1-\sigma) \frac{\partial h}{\partial \xi}; \quad \frac{\partial Z}{\partial \vartheta} = (1-\sigma) \frac{\partial h}{\partial \vartheta}$$

con lo que resulta, para la función  $\pi \tilde{\omega}$ , la siguiente expresión particular, ya presentada por Traci et al., 1978.:

$$\pi \tilde{\omega} \equiv (1-\sigma) \left( u \frac{\partial h}{\partial \xi} + v \frac{\partial h}{\partial \vartheta} \right) - w$$

La condición de óptimo exigía

$$u = u_0 + \tau_H \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad v = v_0 + \tau_H \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \quad w = w_0 + \tau_V \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

Incorporando estas expresiones en la ecuación (A.1), resulta:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \pi u}{\partial \xi} &= \frac{\partial \pi u_0}{\partial \xi} + \tau_H \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \pi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} - \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \frac{\partial Z}{\partial \xi} \right) \\
\frac{\partial \pi v}{\partial \vartheta} &= \frac{\partial \pi v_0}{\partial \vartheta} + \tau_H \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \pi \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} - \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \frac{\partial Z}{\partial \vartheta} \right) \\
\frac{\partial \pi \tilde{\omega}}{\partial \sigma} &= \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( u \frac{\partial Z}{\partial \xi} + v \frac{\partial Z}{\partial \vartheta} - w \right) = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[ \left( u_0 + \tau_H \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} - \tau_H \frac{1}{\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \frac{\partial Z}{\partial \xi} \right) \frac{\partial Z}{\partial \xi} + \right. \\
&\quad \left. \left( v_0 + \tau_H \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} - \tau_H \frac{1}{\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \frac{\partial Z}{\partial \vartheta} \right) \frac{\partial Z}{\partial \vartheta} - w_0 - \frac{\tau_V}{\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right] = \\
&= \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[ u_0 \frac{\partial Z}{\partial \xi} + v_0 \frac{\partial Z}{\partial \vartheta} - w_0 \right] + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[ \tau_H \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial Z}{\partial \xi} - \frac{\tau_H}{\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \left( \frac{\partial Z}{\partial \xi} \right)^2 + \right. \\
&\quad \left. \tau_H \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \frac{\partial Z}{\partial \vartheta} - \frac{\tau_H}{\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \left( \frac{\partial Z}{\partial \vartheta} \right)^2 - \frac{\tau_V}{\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right] = \\
&= \frac{\partial \pi \tilde{\omega}_0}{\partial \sigma} + \\
&\frac{\partial}{\partial \sigma} \left[ - \left[ \left( \frac{\partial Z}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial Z}{\partial \vartheta} \right)^2 \right] \frac{\tau_H}{\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} + \tau_H \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial Z}{\partial \xi} + \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \frac{\partial Z}{\partial \vartheta} \right) \right] - \frac{\tau_V}{\pi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma^2}
\end{aligned}$$

Sumando las tres expresiones, y dividiendo entre  $\tau_H$ , resulta una

expresión análoga a la obtenida por Traci:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \pi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} - \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \frac{\partial Z}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \pi \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} - \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \frac{\partial Z}{\partial \vartheta} \right) + \\
 & \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[ - \left[ \left( \frac{\partial Z}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial Z}{\partial \vartheta} \right)^2 \right] \frac{1}{\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial Z}{\partial \xi} + \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \frac{\partial Z}{\partial \vartheta} \right] - \frac{\tau_v}{\tau_H} \frac{1}{\pi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma^2} = \\
 = & \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \pi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} - \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \frac{\partial Z}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \pi \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} - \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \frac{\partial Z}{\partial \vartheta} \right) + \\
 & \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[ - \left[ \left( \frac{\partial Z}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial Z}{\partial \vartheta} \right)^2 - \frac{\tau_v}{\tau_H} \right] \frac{1}{\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial Z}{\partial \xi} + \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \frac{\partial Z}{\partial \vartheta} \right] = \\
 & \quad - \left[ \frac{\partial \pi v}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \pi u}{\partial \xi} + \frac{\partial \pi \tilde{w}}{\partial \sigma} \right]
 \end{aligned}$$

## ANEXO 2:

Derivacion de las ecuaciones de trabajo en coordenadas conformes, segun la expresion de Bhumralkar

Sea una función  $f(x,y,z)$  cuyas derivadas parciales se desean expresar en el espacio  $(\xi, \vartheta, \sigma)$ .

Las relaciones entre las coordenadas  $(x,y,z)$  y las  $(\xi, \vartheta, \sigma)$  son:

$$\xi=x; \vartheta=y; \sigma=\frac{H-z}{H-h}$$

siendo  $H=H(x,y)$  y  $h=h(x,y)$ . Se definen las funciones auxiliares  $\pi=H-h$  y  $Z=H-\sigma(H-h)=H-\sigma\pi$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \xi} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} = \\ & \frac{\partial f}{\partial x} \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial Z}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial Z}{\partial \xi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vartheta} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \vartheta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \vartheta} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \vartheta} = \\ & \frac{\partial f}{\partial x} \cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial Z}{\partial \vartheta} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial Z}{\partial \vartheta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \sigma} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \sigma} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \sigma} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \sigma} = \\ & \frac{\partial f}{\partial x} \cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial z} (-\pi) = -\pi \frac{\partial f}{\partial z} \end{aligned}$$

Sustituyendo en las anteriores expresiones, resultan

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{1}{\pi} \frac{\partial Z}{\partial \xi} \frac{\partial f}{\partial \sigma}$ $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\pi} \frac{\partial Z}{\partial \vartheta} \frac{\partial f}{\partial \sigma}$ $\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{1}{\pi} \frac{\partial f}{\partial \sigma}$	$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial z}$ $\frac{\partial f}{\partial \vartheta} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial z}$ $\frac{\partial f}{\partial \sigma} = -\pi \frac{\partial f}{\partial z}$
---	---

Si se toman como funciones  $f$  las componentes  $\pi u$  y  $\pi v$ , resulta

$$\frac{\partial \pi u}{\partial \xi} = \frac{\partial \pi u}{\partial x} + \frac{\partial \pi u}{\partial z} \frac{\partial Z}{\partial \xi} = \pi \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \pi}{\partial x} - \frac{1}{\pi} \frac{\partial \pi u}{\partial \sigma} \frac{\partial Z}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial \pi v}{\partial \vartheta} = \frac{\partial \pi v}{\partial y} + \frac{\partial \pi v}{\partial z} \frac{\partial Z}{\partial \vartheta} = \pi \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial \pi}{\partial y} - \frac{1}{\pi} \frac{\partial \pi v}{\partial \sigma} \frac{\partial Z}{\partial \vartheta}$$

Sumando y aplicando la ecuación de la continuidad, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi u}{\partial \xi} + \frac{\partial \pi v}{\partial \vartheta} &= \pi \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + u \frac{\partial \pi}{\partial x} + v \frac{\partial \pi}{\partial y} - \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\partial \pi u}{\partial \sigma} \frac{\partial Z}{\partial \xi} + \frac{\partial \pi v}{\partial \sigma} \frac{\partial Z}{\partial \vartheta} \right] = \\ &= -\pi \frac{\partial w}{\partial z} + u \frac{\partial \pi}{\partial x} + v \frac{\partial \pi}{\partial y} - \frac{1}{\pi} \left[ \left( \pi \frac{\partial u}{\partial \sigma} + u \frac{\partial \pi}{\partial \sigma} \right) \frac{\partial Z}{\partial \xi} + \left( \pi \frac{\partial v}{\partial \sigma} + v \frac{\partial \pi}{\partial \sigma} \right) \frac{\partial Z}{\partial \vartheta} \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial w}{\partial \sigma} + u \frac{\partial \pi}{\partial x} + v \frac{\partial \pi}{\partial y} - \left[ \frac{\partial u}{\partial \sigma} \frac{\partial Z}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \sigma} \frac{\partial Z}{\partial \vartheta} \right] = u \left[ \frac{\partial \pi}{\partial \xi} + \frac{1}{\pi} \frac{\partial \pi}{\partial \sigma} \frac{\partial Z}{\partial \xi} \right] + \\
&\quad + v \left[ \frac{\partial \pi}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\pi} \frac{\partial \pi}{\partial \sigma} \frac{\partial Z}{\partial \vartheta} \right] + \frac{\partial w}{\partial \sigma} - \left[ \frac{\partial u}{\partial \sigma} \frac{\partial Z}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \sigma} \frac{\partial Z}{\partial \vartheta} \right] = \\
&u \frac{\partial \pi}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \sigma} \frac{\partial Z}{\partial \xi} + v \frac{\partial \pi}{\partial \vartheta} - \frac{\partial v}{\partial \sigma} \frac{\partial Z}{\partial \vartheta} + \frac{\partial w}{\partial \sigma} = \\
&-\frac{\partial}{\partial \sigma} \left( u \frac{\partial Z}{\partial \xi} \right) - \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( v \frac{\partial Z}{\partial \vartheta} \right) + \frac{\partial w}{\partial \sigma} = -\frac{\partial}{\partial \sigma} \left[ u \frac{\partial Z}{\partial \xi} + v \frac{\partial Z}{\partial \vartheta} - w \right]
\end{aligned}$$

Si se define ahora la función  $\pi \tilde{\omega} = u \frac{\partial Z}{\partial \xi} + v \frac{\partial Z}{\partial \vartheta} - w$ , resulta:

$$\frac{\partial \pi u}{\partial \xi} + \frac{\partial \pi v}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \pi \tilde{\omega}}{\partial z} = 0 \quad (\text{A.2})$$

expresión que tiene una forma análoga a la condición de continuidad en las coordenadas  $x, y, z$ .

Obsérvese que si  $H$  es constante, entonces  $H = H(x, y)$  y serán:

$$\frac{\partial Z}{\partial \xi} = \sigma \frac{\partial h}{\partial \xi}; \quad \frac{\partial Z}{\partial \vartheta} = \sigma \frac{\partial h}{\partial \vartheta}$$

con lo que resulta, para la función  $\pi \tilde{\omega}$ , la siguiente expresión particular, ya presentada por Traci et al., 1978.:

$$\pi \tilde{\omega} = \sigma \left( u \frac{\partial h}{\partial \xi} + v \frac{\partial h}{\partial \vartheta} \right) - w$$

La condición de óptimo exigía

$$u = u_0 + \tau_H \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad v = v_0 + \tau_H \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \quad w = w_0 + \tau_V \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

Incorporando estas expresiones en la ecuación (XXX), resulta:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \pi u}{\partial \xi} &= \frac{\partial \pi u_0}{\partial \xi} + \tau_H \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \pi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \frac{\partial Z}{\partial \xi} \right) \\
\frac{\partial \pi v}{\partial \vartheta} &= \frac{\partial \pi v_0}{\partial \vartheta} + \tau_H \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \pi \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \frac{\partial Z}{\partial \vartheta} \right) \\
\frac{\partial \pi \tilde{\omega}}{\partial \sigma} &= \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( u \frac{\partial Z}{\partial \xi} + v \frac{\partial Z}{\partial \vartheta} - w \right) = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[ \left( u_0 + \tau_H \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \tau_H \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \frac{\partial Z}{\partial \xi} \right) \frac{\partial Z}{\partial \xi} + \right. \\
&\quad \left. \left( v_0 + \tau_H \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} + \tau_H \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \frac{\partial Z}{\partial \vartheta} \right) \frac{\partial Z}{\partial \vartheta} - w_0 + \frac{\tau_V}{\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right] = \\
&= \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[ u_0 \frac{\partial Z}{\partial \xi} + v_0 \frac{\partial Z}{\partial \vartheta} - w_0 \right] + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[ \tau_H \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial Z}{\partial \xi} + \frac{\tau_H}{\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \left( \frac{\partial Z}{\partial \xi} \right)^2 + \right. \\
&\quad \left. \tau_H \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \frac{\partial Z}{\partial \vartheta} + \frac{\tau_H}{\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \left( \frac{\partial Z}{\partial \vartheta} \right)^2 - \frac{\tau_V}{\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right] = \\
&= \frac{\partial \pi \tilde{\omega}_0}{\partial \sigma} + \\
&\quad \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[ \left[ \left( \frac{\partial Z}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial Z}{\partial \vartheta} \right)^2 \right] \frac{\tau_H}{\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} + \tau_H \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \frac{\partial Z}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \frac{\partial Z}{\partial \vartheta} \right) \right] - \frac{\tau_V}{\pi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma^2}
\end{aligned}$$

Sumando las tres expresiones, y dividiendo entre  $\tau_H$ , resulta una

expresión análoga a la obtenida por Traci:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \pi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \frac{\partial Z}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \pi \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \frac{\partial Z}{\partial \vartheta} \right) + \\
 & \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[ \left[ \left( \frac{\partial Z}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial Z}{\partial \vartheta} \right)^2 \right] \frac{1}{\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} + \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \frac{\partial Z}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \frac{\partial Z}{\partial \vartheta} \right] - \frac{\tau_v}{\tau_H} \frac{1}{\pi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma^2} = \\
 = & \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \pi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \frac{\partial Z}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \pi \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \frac{\partial Z}{\partial \vartheta} \right) + \\
 & \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[ \left[ \left( \frac{\partial Z}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial Z}{\partial \vartheta} \right)^2 - \frac{\tau_v}{\tau_H} \right] \frac{1}{\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} + \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \frac{\partial Z}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \frac{\partial Z}{\partial \vartheta} \right] = \\
 & \quad - \left[ \frac{\partial \pi v_0}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \pi u_0}{\partial \xi} + \frac{\partial \pi \tilde{w}_0}{\partial \sigma} \right]
 \end{aligned}$$

ANEXO 3:

Listado y periodo de los datos disponibles provenientes de las estaciones automaticas de la DNE

Tabla con las fechas inicial y final en la que se registran datos

DD/MM/AA	LOB	POL	SOL	IGN	COR	AIG	VEL	TOR	CAR	MAN	TAL	ANI
03/04/90			X		X		X					
04/04/90			X		X		X	X				
21/04/90			X		X		X	X				
24/04/90			X		X	X	X					
25/04/90			X		X	X	X	X				
03/05/90			X	X	X	X	X	X				
13/05/90			X	X	X	X	X	X				
27/05/90			X	X	X	X		X				
28/05/90			X	X		X		X				
29/05/90			X	X	X	X		X				
01/06/90			X	X	X	X		X				
12/06/90				X	X	X	X	X				
23/06/90				X		X	X	X				
24/06/90				X		X		X				
25/06/90				X		X	X	X				
26/06/90			X	X	X	X	X	X				
14/07/90			X	X	X	X		X				
15/07/90				X	X	X		X				
18/07/90				X	X	X		X				
19/07/90		X	X	X	X	X		X				
20/07/90		X	X	X	X	X						
01/08/90		X	X	X	X	X						
02/08/90		X	X	X	X	X		X				
08/08/90	X	X	X	X	X	X		X				
18/09/90	X	X	X	X	X	X		X				
06/10/90	X	X		X	X	X		X				
12/10/90		X		X		X		X				
19/10/90				X		X			X			
25/10/90				X		X			X	X		
28/10/90				X		X			X	X		
08/11/90						X			X	X		X
14/11/90				X		X			X	X		X
15/11/90				X		X			X	X		X
21/11/90				X					X	X	X	X
11/12/90				X		X			X	X	X	X
18/12/90				X	X	X			X	X	X	X
22/01/91				X	X	X			X	X	X	X
26/01/91				X	X	X			X	X		X
07/02/91				X	X	X				X		X
08/02/91				X	X					X		X
03/03/91				X						X		X
07/03/91				X						X		
15/03/91										X		
<b>Total:</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>5</b>	<b>10</b>	<b>10</b>	<b>10</b>	<b>2</b>	<b>6</b>	<b>3</b>	<b>5</b>	<b>2</b>	<b>4</b>

Nota: Totales aproximados en meses.

Fuente: Direccion Nacional de Energia; Nota del 30/10/90

Incluye unicamente aquellas estaciones con registro de modulo y direccion.

### Código de estación

308	LOB	Isla de Lobos	309	POL	Polanco
310	SOL	Solís de Mataojo	311	IGN	José Ignacio
312	COR	Cerro Cordillera	331	ANI	Cerro de las Animas
314	AIG	Aiguá	318	VEL	Velázquez
319	TOR	Cerro del Toro	326	CAR	Sierra de Caracoles
327	MAN	Manguera	328	TAL	Tala

# CURRICULUM VITAE SINTETICO

**APELLIDOS Y NOMBRES:** López Vázquez, Carlos Manuel

**DOC. IDENTIDAD:**1:555 799-3 **FECHA DE NACIMIENTO:** 08/09/61 **SEXO:** M

**DIRECCION PARTICULAR:** Thiebaut 1887 bis apto 1

**CIUDAD Y PAIS:** Montevideo, Uruguay **COD. POSTAL:**

**TELEFONO:** 47 43 60

**FECHA DE REFERENCIA DE ESTE CURRICULUM:** Julio de 1993

## I. FORMACION ACADEMICA

### TITULOS

1. Ingeniero Industrial, Opción Mecánica Montevideo

2. Magister en Mecánica de los fluidos aplicada (Montevideo)

Director de tesis: Dr. Vicent Espert Alemany

(Universidad Politécnica de Valencia, España)

## II. DENOMINACION DEL CARGO QUE OCUPA ACTUALMENTE

Prof. Adjunto, Gr. 3 (Titular) a tiempo completo en el Centro de Cálculo, Facultad de Ingeniería, Universidad de la República, Montevideo, Uruguay

**FECHA DE INICIO EN EL CARGO:** 2/1/89

**DIRECCION POSTAL:** CC 30, CP 11300 **TELEFONO :** 71 42 29-30

**DIRECCION ELECTRONICA:** carlos@fing.edu.uy

## III. ACTIVIDADES ANTERIORES DE CARACTER CIENTIFICO O PROFESIONAL

FECHA	PUESTO	INSTITUCION
1987..88	Ayudante Gr. 1	Instituto de Mecánica de los Fluidos e Ingeniería Ambiental (IMFIA)
1988..89	Asistente Gr. 2	Id.
1989..91	Profesor Adjunto, Gr. 3	Id.
1982..87	Profesor de Física y Matemática	UTU
1989..92	Profesor Adjunto Gr.3	Centro de Cálculo

## IV. IDIOMAS DE INTERES CIENTIFICO (R=regular, B=bien, MB=muy bien)

IDIOMA	HABLA	LEE	ESCRIBE
Inglés	B	MB	B

**V. PARTICIPACION EN PROYECTOS DE INVESTIGACION FINANCIADOS EN  
LOS ULTIMOS 10 AÑOS**

---

*TITULO DEL PROYECTO:* Algoritmos de control de calidad de  
datos y de imputación de valores ausentes

*ENTIDAD FINANCIADORA:* UTE - CeCal

*DURACION DESDE:* Abril 1989      *HASTA:* 1992

*INVESTIGADOR(ES) PRINCIPAL(ES):* Carlos López

---

**VI. PUBLICACIONES**

"Determinación del campo de velocidad media, en la zona sur  
del Uruguay". XIV Congreso Latinoamericano de Hidráulica,  
Montevideo, Noviembre de 1990. V 3 (A)

"Robot posicionador de instrumentos para el túnel de  
viento". XIV Congreso Latinoamericano de Hidráulica,  
Montevideo, Noviembre de 1990. V 3 (A)

"Determinación del campo instantáneo de velocidades a  
partir de un número insuficiente de datos". Encuentro del  
Grupo de Trabajo en Hidromecánica de la Asociación  
Latinoamericana de Investigaciones Hidráulicas, Salto  
Grande, Abril de 1992. (A)

"Perspectivas de la energía eólica en el Uruguay como  
alternativa energética". II Workshop sobre energía eólica,  
Porto Alegre, 1987 (A)

---

**VII. PARTICIPACION EN CONTRATOS DE INVESTIGACION O DESARROLLO DE ESPECIAL RELEVANCIA CON EMPRESAS Y/O ADMINISTRACIONES**

*TITULO DEL CONTRATO:* Convenio para el estudio del Potencial Eólico Nacional

*EMPRESA/ADM. FINANCIADORA:* UTE

*DURACION DESDE:* Dic. 1990                      *HASTA:* Abril 1988

*INVESTIGADOR(ES) PRINCIPAL(ES):* Agustín Cisa, Rafael Guarga, César Briozzo, Carlos López, José Cataldo

*FORMA DE PARTICIPACION:* Dirección de los trabajos de modelación numérica del campo de velocidades de viento. Tratamiento de las series temporales medidas y calculadas

---

---

*TITULO DEL CONTRATO:* Elaboración de un modelo hidrológico para el Río Negro

*EMPRESA/ADM. FINANCIADORA:* UTE

*DURACION DESDE:* Abril 1989                      *HASTA:* Julio 1991

*INVESTIGADOR(ES) RESPONSABLE(S):* Luis Silveira, Carlos López, José Luis Genta, Rosario Curbelo, Carlos Anido

*FORMA DE PARTICIPACION:* Dirección de los aspectos informáticos del proyecto. Tratamiento de datos y algoritmos de depuración de errores y manejo de ausencias.

---

---

*TITULO DEL CONTRATO:* Evaluación del potencial eólico nacional al norte del Río Negro

*EMPRESA/ADM. FINANCIADORA:* UTE

*DURACION DESDE:* Abril 1992                      *HASTA:* Abril 1993

*INVESTIGADOR(ES) RESPONSABLE(S):* José Cataldo, César Briozzo, Ventura Nunes, Carlos López

*FORMA DE PARTICIPACION:* Dirección de los trabajos de determinación del campo de velocidad media. Procesamiento y correlación con valores medidos.

---

---

*TITULO DEL CONTRATO:* Evaluación del potencial eólico nacional para generación autónoma

*EMPRESA/ADM. FINANCIADORA:* UTE

*DURACION DESDE:* Abril 1992      *HASTA:* Abril 1993

*INVESTIGADOR(ES) RESPONSABLE(S):* José Cataldo, César Briozzo, Ventura Nunes, Carlos López

*FORMA DE PARTICIPACION:* Idem anterior

---

---

*TITULO DEL CONTRATO:* Determinación de las curvas de isoconcentración de contaminante proveniente de la planta de la Compañía Uruguaya de cemento Portland

*EMPRESA/ADM. FINANCIADORA:* Intendencia Municipal de Montevideo

*DURACION DESDE:* 1990                      *HASTA:* 1991

*INVESTIGADOR(ES) RESPONSABLE(S):* Uri Groisman, José Cataldo, Carlos López

*FORMA DE PARTICIPACION:* Definición de los modelos a utilizar y seguimiento de los resultados.

---

---

#### **VIII. ESTADIAS EN CENTROS EXTRANJEROS**

*CENTRO:* Cátedra de mecánica de los fluidos, Universidad Politécnica de Valencia

*PAIS:* España                      *LOCALIDAD:* Valencia *DURACION:* 1 mes

*TEMA:* Análisis de modelos de dispersión de contaminantes en pequeña y gran escala. Modelación del campo de velocidades de viento para problemas de contaminación en atmósfera

---

---

#### **IX. CONGRESOS**

*TIPO DE PARTICIPACION:* Expositor

*CONGRESO:* XIV Congreso Latinoamericano de Hidráulica

*LUGAR DE CELEBRACION:* Montevideo      *AÑO:* 1990

---

---