

Géostatistique multivariable

Automne 2003

Plan

- Besoin et exemples
- Cokrigage simple et ordinaire
- Covariance croisée et variogramme croisé
- Cas où le cokrigage peut être utile
- Exemples

Contexte et problématique

Idée : améliorer les estimations obtenues par krigeage en utilisant l'information fournie par d'autres variables (variables secondaires) que la variable principale

Exemples :

a) Estimer la position du sommet d'un réservoir pétrolier ou gazier

Variable principale : position du sommet observé dans quelques forages

Variables secondaires : - positions interprétées par sismique

- attitude du contact dans les forages

=> Obtenir une estimation qui respecte les données de forage, la forme générale de la surface sismique et l'attitude observée dans les forages.

Exemples :

b) Produire une carte de charges hydrauliques qui soit réaliste

Variable principale : surface piézométrique dans quelques puits

Variables secondaires : - surface topographique (aquifère à nappe libre)

- frontières imperméables connues

- vecteurs gradients connus

- mesures géoradar

=> Obtenir une estimation qui respecte les données de puits et les frontières et la forme générale décrite par les mesures géoradar et la topographie.

Exemples :

c) Modélisation de la transmissivité d'un aquifère

Variable principale : transmissivités dans un modèle d'éléments finis ou de différences finies

Variables secondaires : - transmissivité ou conductivités hydrauliques obtenues par « slug-test », test de pompage, courbes granulométriques, capacité spécifique de puits.

- frontières connues

- charges hydrauliques connues (permanent et transitoire)

=> Obtenir une estimation de la transmissivité qui respecte les données de transmissivité à différentes échelles, les données piézométriques et les frontières connues.

Exemples :

d) Inversion de données gravimétriques

Variable principale : densité pour un modèle de blocs du sous-sol

Variables secondaires : - anomalie gravimétrique mesurée au sol

- anomalie gravimétrique aéroportée

- quelques mesures de densité en forage

=> Obtenir une estimation de la densité qui respecte les anomalies et les densités observées

Note : ici, souvent, on n'a aucune observation directe de la variable principale !

Exemples :

e) Inversion de tomographies radar

Variable principale : modèle de « lenteurs » pour un modèle de blocs du sous-sol dans le plan défini par 2 forages coplanaires

Variable secondaire : temps de parcours émetteur-récepteur

=> Obtenir une estimation des lenteurs qui respecte les temps de parcours

Note : souvent, on n'a aucune observation de la variable principale !

Exemples :

f) Cartographie de la température de l'eau en surface

Variable principale : température de l'eau mesurée directement (bateau)

Variable secondaire : température obtenue par interprétation du signal spectral d'un satellite

g) Cartographie de la bathymétrie

Variable principale : mesures directes (bateau)

Variable secondaire : interprétation d'un levé hydro-acoustique

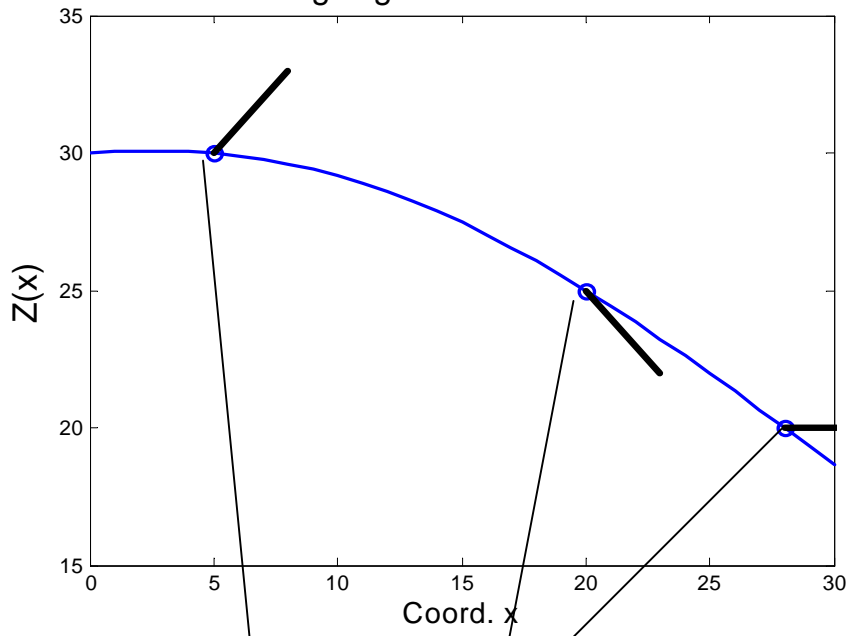
h) Cartographie de la contamination

Variable principale : teneurs d'un polluant

Variables secondaires : topographie, surface piézométrique, ...

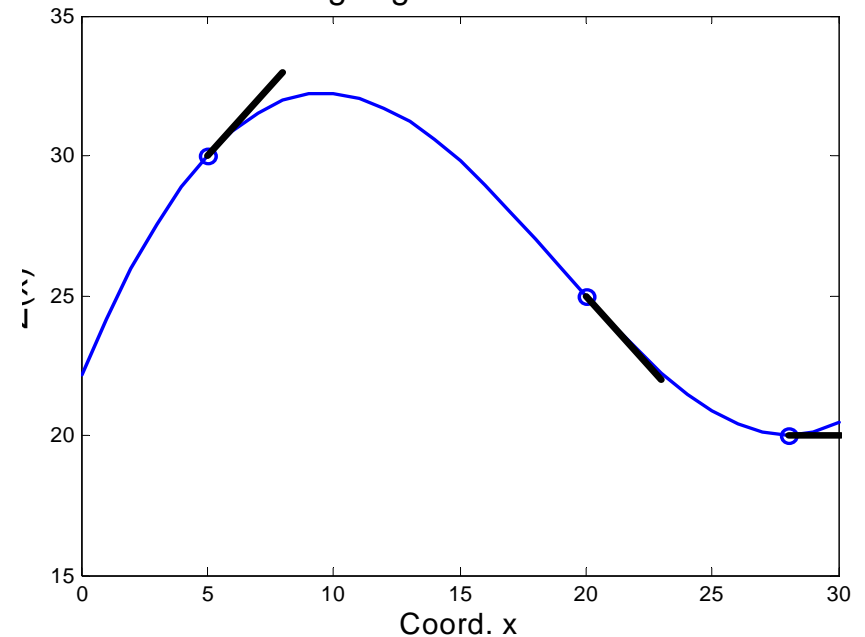
Exemple de cokrigage

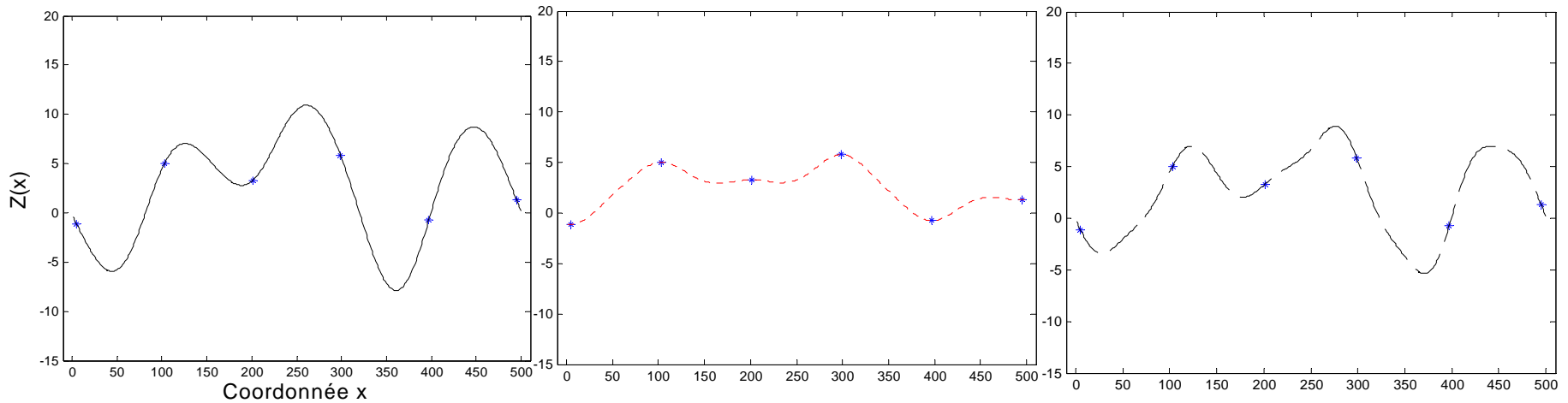
Krigeage sans dérivées



La dérivée de la surface krigée n'est pas égale à la dérivée observée

Cokrigage avec dérivées





Vrai signal

Krigeage (dérivées
non-respectées)

Cokrigeage
(dérivées
respectées)

MAE : krigage 4.13
cokrigeage : 1.24

Autre exemple de cokrigeage

On mesure la base (B), le sommet (S) et l'épaisseur (E) d'une même formation en quelques forages.

On modélise les variogrammes de ces 3 variables

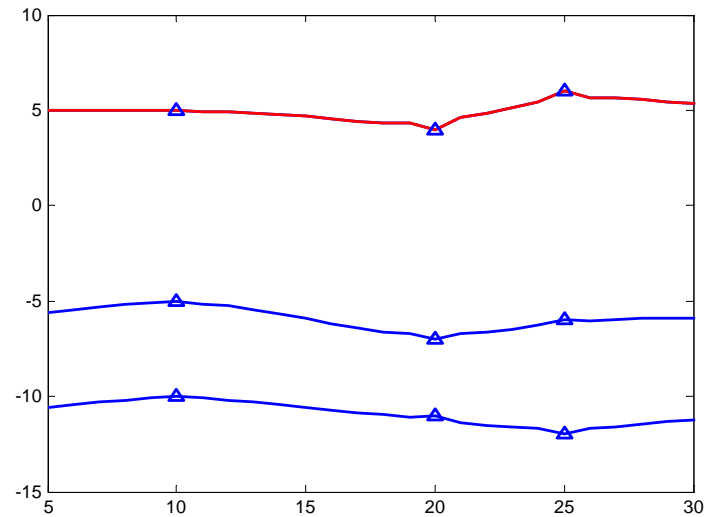
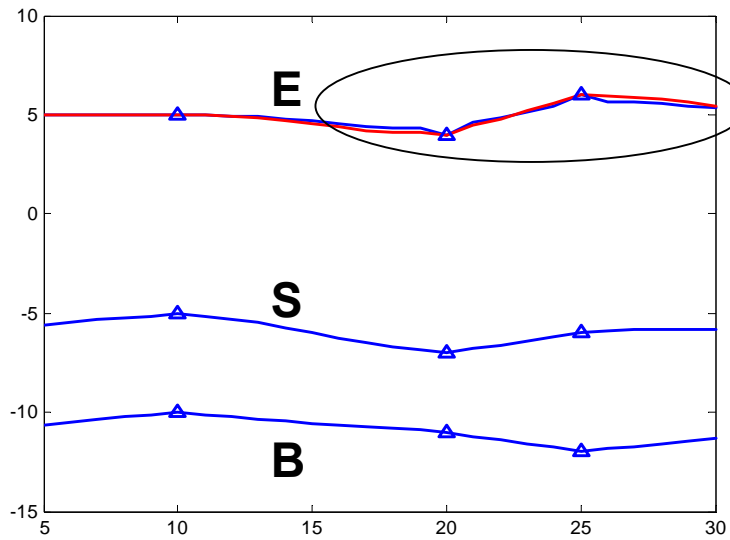
On effectue le krigeage de ces 3 variables $\Rightarrow B^*(x), S^*(x), E^*(x)$

Aura-t-on : $E^*(x) = S^*(x) - B^*(x)$?

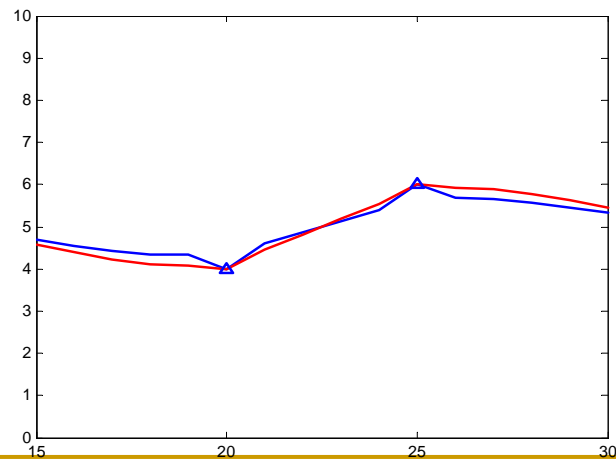
Non pour le krigeage

Oui pour le cokrigeage

(si les covariances reflètent la relation physique $E = S - B$)



Krigeage



Cokrigage

Cokrigage simple

Cas de 2 variables

$Z(x)$: variable principale : n_z observations

$Y(x)$: variable secondaire : n_y observations

Les moyennes de $Z(x)$ et $Y(x)$ sont connues m_z m_y

$$Z_0^* = m_z + \sum_{i=1}^{n_z} \lambda_i (Z_i - m_z) + \sum_{i=1}^{n_y} \alpha_i (Y_i - m_y)$$

$$\text{Var}(Z_0 - Z_0^*) = \text{Var}(Z_0) + \sum_{i=1}^{n_z} \sum_{j=1}^{n_z} \lambda_i \lambda_j \text{Cov}(Z_i, Z_j) + \sum_{i=1}^{n_y} \sum_{j=1}^{n_y} \alpha_i \alpha_j \text{Cov}(Y_i, Y_j) + 2 \sum_{i=1}^{n_z} \sum_{j=1}^{n_y} \lambda_i \alpha_j \text{Cov}(Z_i, Y_j) - 2 \sum_{i=1}^{n_z} \lambda_i \text{Cov}(Z_0, Z_i) - 2 \sum_{i=1}^{n_y} \alpha_i \text{Cov}(Z_0, Y_i)$$

$$\sum_{j=1}^{nz} \lambda_j \text{Cov}(Z_i, Z_j) + \sum_{j=1}^{ny} \alpha_j \text{Cov}(Z_i, Y_j) = \text{Cov}(Z_0, Z_i) \quad \forall i = 1 \dots nz$$

$$\sum_{j=1}^{nz} \lambda_j \text{Cov}(Y_i, Z_j) + \sum_{j=1}^{ny} \alpha_j \text{Cov}(Y_i, Y_j) = \text{Cov}(Z_0, Y_i) \quad \forall i = 1 \dots ny$$

$$\sigma_{ck}^2 = \text{Var}(Z_0) - \sum_{i=1}^{nz} \lambda_i \text{Cov}(Z_0, Z_i) - \sum_{i=1}^{ny} \alpha_i \text{Cov}(Z_0, Y_i)$$

Cokrigage ordinaire

Les moyennes de $Z(x)$ et $Y(x)$ sont inconnues

$$Z_0^* = \sum_{i=1}^{nz} \lambda_i Z_i + \sum_{i=1}^{ny} \alpha_i Y_i$$

$$\sum_{i=1}^{nz} \lambda_i = 1 \text{ et } \sum_{i=1}^{ny} \alpha_i = 0$$

$$\sum_{j=1}^{nz} \lambda_j \text{Cov}(Z_i, Z_j) + \sum_{j=1}^{ny} \alpha_j \text{Cov}(Z_i, Y_j) + \mu_z = \text{Cov}(Z_0, Z_i) \quad \forall i = 1 \dots nz$$

$$\sum_{j=1}^{nz} \lambda_j \text{Cov}(Y_i, Z_j) + \sum_{j=1}^{ny} \alpha_j \text{Cov}(Y_i, Y_j) + \mu_y = \text{Cov}(Z_0, Y_i) \quad \forall i = 1 \dots ny$$

$$\sum_{i=1}^{nz} \lambda_i = 1$$

$$\sum_{i=1}^{ny} \alpha_i = 0$$

$$\sigma_{ck}^2 = \text{Var}(Z_0) - \sum_{i=1}^{nz} \lambda_i \text{Cov}(Z_0, Z_i) - \sum_{i=1}^{ny} \alpha_i \text{Cov}(Z_0, Y_i) - \mu_z$$

Sous forme matricielle, cokrigage ordinaire et simple s'écrivent:

$$K\lambda = k \quad \text{et} \quad \sigma_{ck}^2 = \text{Var}(Z_0) - \lambda' k$$

Avec, pour le Cokrigage simple

$$\begin{bmatrix} K_{zz} & K_{zy} \\ K_{yz} & K_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{zz} \\ k_{yz} \end{bmatrix}$$

pour le Cokrigage ordinaire

$$\begin{bmatrix} K_{zz} & K_{zy} & 1 & 0 \\ K_{yz} & K_{yy} & 0 & 1 \\ 1' & 0' & 0 & 0 \\ 0' & 1' & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \alpha \\ \mu_z \\ \mu_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{zz} \\ k_{yz} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

K_{zz} est $n_z \times n_z$; K_{zy} est n_z par n_y ; K_{yz} est $n_y \times n_z$; K_{yy} est n_y par n_y ;
 k_{zz} est $n_z \times 1$; k_{yz} est $n_y \times 1$

Les matrices de cokrigage sont toujours symétriques $\Rightarrow K_{zy} = K'_{yz}$

Toutefois, les fonctions de covariances croisées, elles, ne sont pas nécessairement symétriques, en effet :

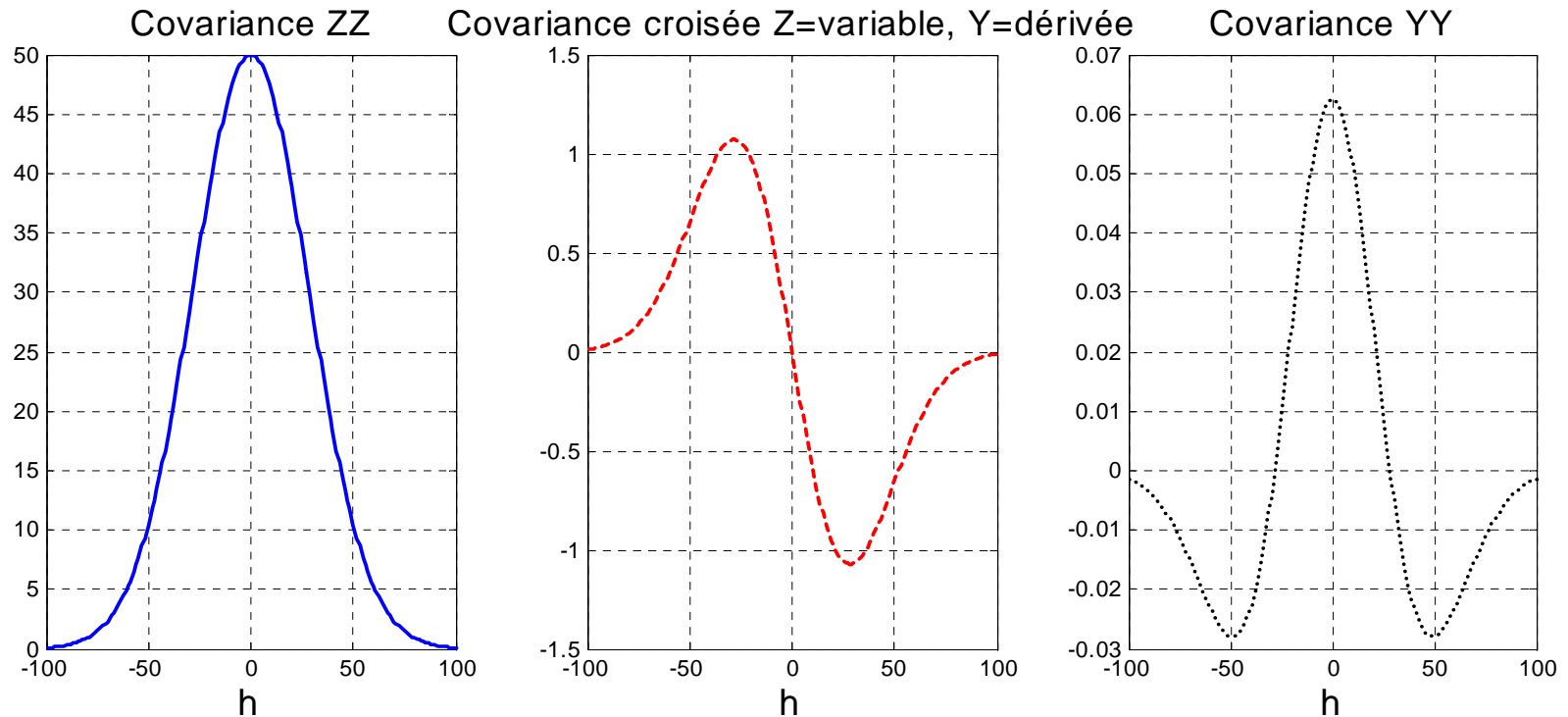
$$C_{zy}(h) = \text{Cov}(Z(x), Y(x+h)) = \text{Cov}(Y(x+h), Z(x)) = C_{yz}(-h)$$

mais, en général

$$C_{zy}(h) = \text{Cov}(Z(x), Y(x+h)) \neq \text{Cov}(Y(x), Z(x+h)) = C_{yz}(h) = C_{zy}(-h)$$

Exemple

Cas 1D d'une variable et de sa dérivée



Notes:

- a) krigage => + souvent krigage ordinaire
cokrigage => cokrigage simple est souvent plus indiqué (e.g. cas où la variable principale n'est pas observée)
- b) krigage => variogramme est l'outil de base
cokrigage => covariance est l'outil de base

Covariance croisée et variogramme croisé

Covariance croisée

$$C_{zy}(h) = \text{Cov}(Z(x), Y(x+h))$$

Variogramme croisé

$$\begin{aligned}\gamma_{zy}(h) &= 0.5 * E[(Z(x) - Z(x+h))(Y(x) - Y(x+h))] \\ &= 0.5 * \text{Cov}((Z(x) - Z(x+h)), (Y(x) - Y(x+h)))\end{aligned}$$

=> Le variogramme croisé est toujours symétrique


Lien

$$\gamma_{zy}(h) = C_{zy}(0) - 0.5 * (C_{zy}(h) + C_{zy}(-h))$$


=> La covariance croisée ne peut être déduite du variogramme croisé que si elle est symétrique !

=> La covariance croisée est + générale que le variogramme croisé

Comparaison



Covariance croisée	Variogramme croisée
Mz et My connus	Pas besoin
Tous les points ou l'une ou l'autre variable est connue peuvent être utilisés dans le calcul de la covariance	Seuls les points ou les 2 variables sont connues peuvent être utilisés dans le calcul du variogramme croisé
La covariance peut être asymétrique	La covariance doit être symétrique



Modèles admissibles

But : assurer que toute combinaison linéaire de Z et Y présente une **variance théorique positive**.

Vérification délicate, on se limite à des cas certains

- a) Modèle découlant de relations physiques ou mathématiques entre Z et Y. Si l'on connaît C_{zz} alors on peut déduire C_{zy} et C_{yy} .

Exemple 1D : $Y(x) = dZ(x)/dx \Rightarrow$

$$\text{Cov}(Z(x), Y(x+h)) = d [\text{Cov}(Z(x), Z(x+h))]/dx$$

$$\text{Cov}(Y(x), Y(x+h)) = - d^2[\text{Cov}(Z(x), Z(x+h))]/dx^2$$

b) Modèle de corégionalisation linéaire

$$\begin{bmatrix} C_{zz}(h) & C_{zy}(h) \\ C_{yz}(h) & C_{yy}(h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{1,zz} & B_{1,zy} \\ B_{1,yz} & B_{1,yy} \end{bmatrix} C_1(h) + \begin{bmatrix} B_{2,zz} & B_{2,zy} \\ B_{2,yz} & B_{2,yy} \end{bmatrix} C_2(h) + \dots$$
$$= B_1 C_1(h) + B_2 C_2(h) + \dots$$

⇒ toutes les covariances et covariances croisées peuvent s'exprimer comme une combinaison linéaire de quelques structures de base (de palier 1, arbitrairement). Les matrices B sont des matrices de coefficients.

Exemple: 2 structures de base : 1 effet de pépité + 1 sphérique, a=30

$C_1(h)$ représente l'effet de pépité ⇒ $C_1(0) = 1$; $C_1(h>0) = 0$

$C_2(h)$ représente la partie sphérique ⇒ $C_2(h) = (1.5 h/a - 0.5 (h/a)^3)$

Si chaque matrice **B est positive semi-définie** (i.e. $\det(B) \geq 0$) alors le modèle est admissible.

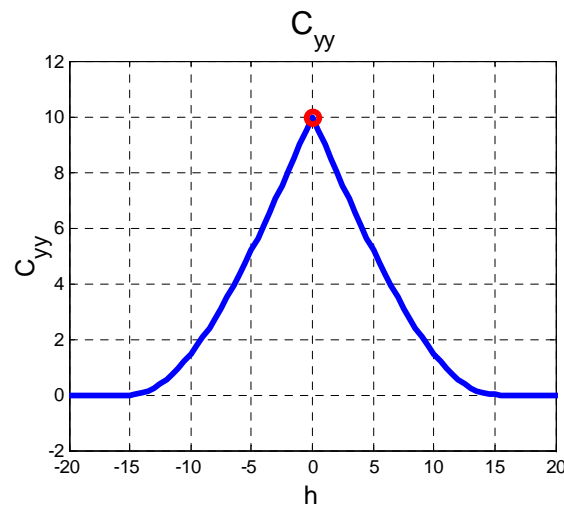
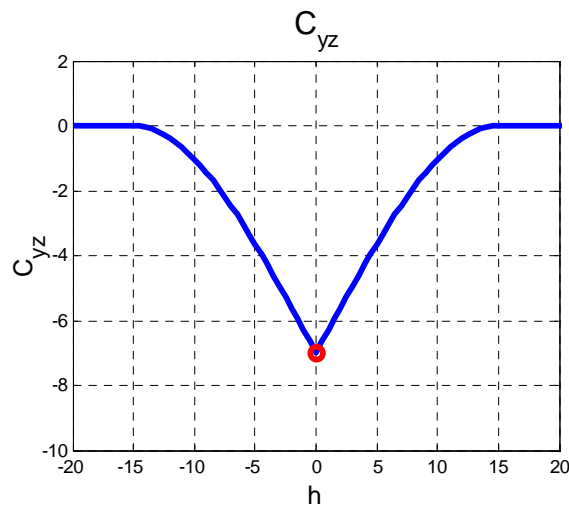
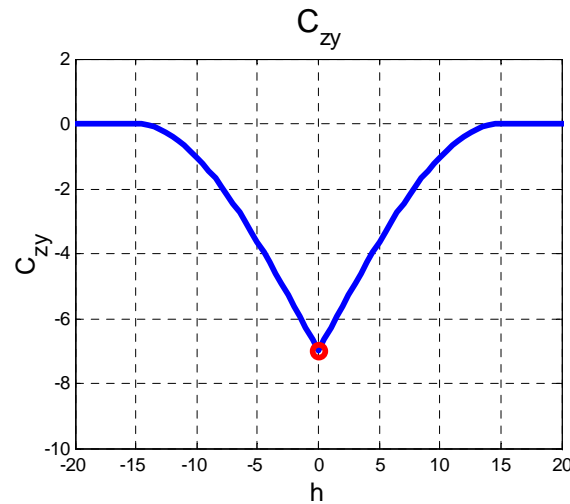
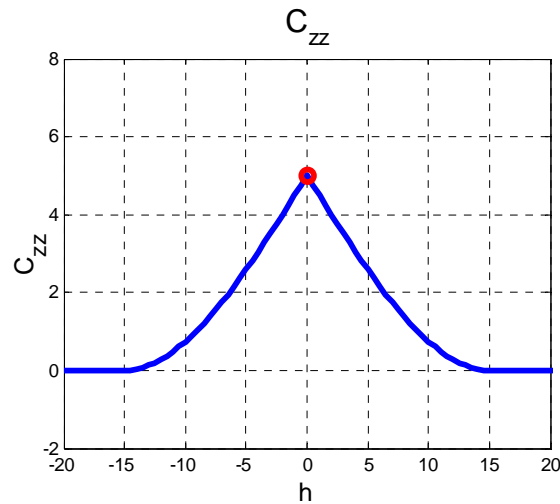
Si l'une des matrices n'est pas positive semi-définie, alors on ne peut rien dire sur l'admissibilité du modèle.

Note : lorsque toutes les matrices B **sont égales**, on peut réécrire le modèle linéaire de corégionalisation comme:

$$\begin{bmatrix} C_{zz}(h) & C_{zy}(h) \\ C_{yz}(h) & C_{yy}(h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{zz} & B_{zy} \\ B_{yz} & B_{yy} \end{bmatrix} C(h) = B C(h)$$

Ce modèle indique que toutes les covariances sont **proportionnelles** à un modèle de base unique de palier arbitraire 1 et pouvant comprendre plusieurs composantes élémentaires (e.g. effet pépité+sphérique avec $a=30$). Ce modèle est admissible ssi B est positive semi-définie.

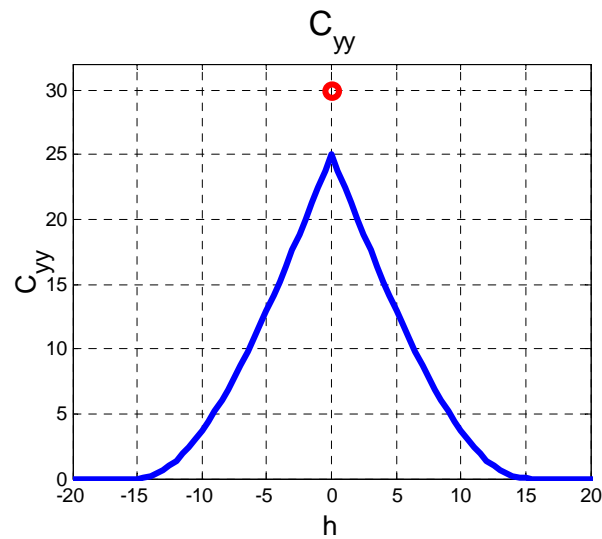
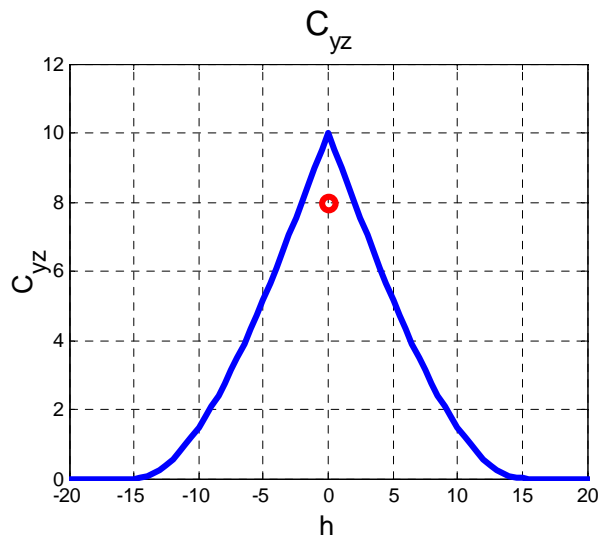
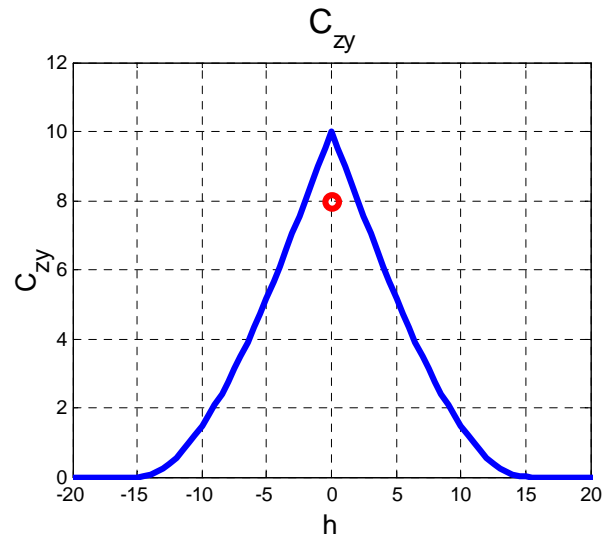
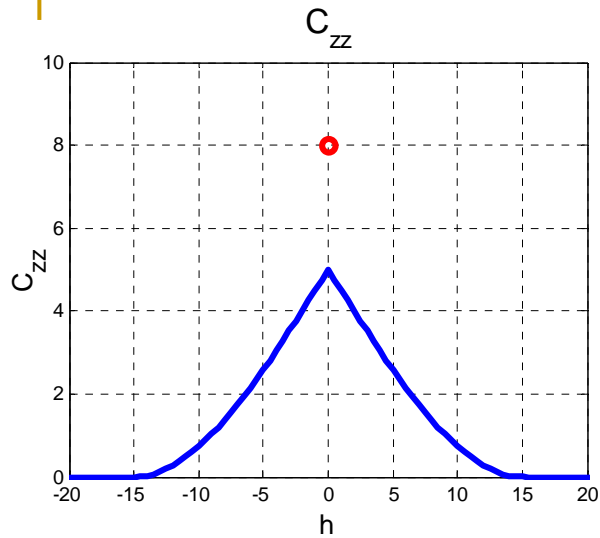
Exemples de modèle linéaire de corégionalisation



Modèle sphérique
 $a=15$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -7 & 10 \end{bmatrix}$$

$\text{Det}(B)=1 \Rightarrow$
modèle admissible



Effet pépité+

Modèle sphérique
 $a=15$

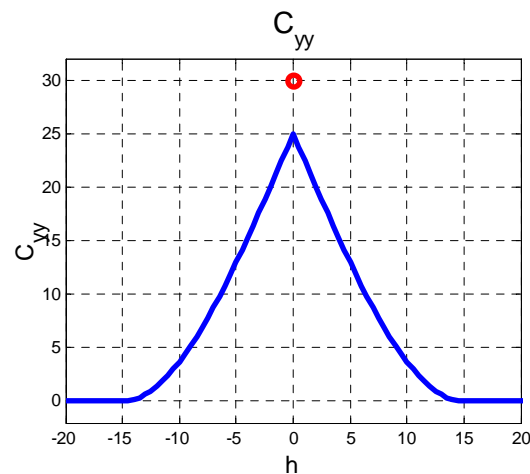
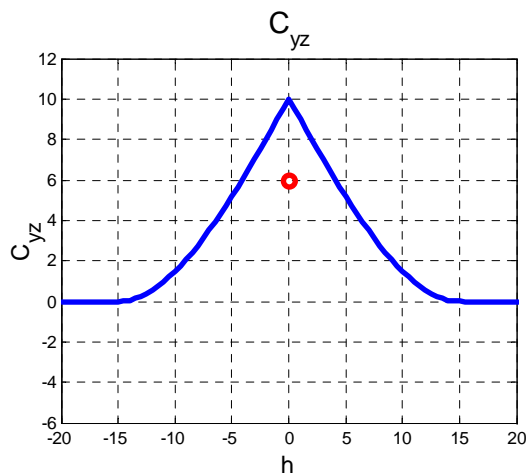
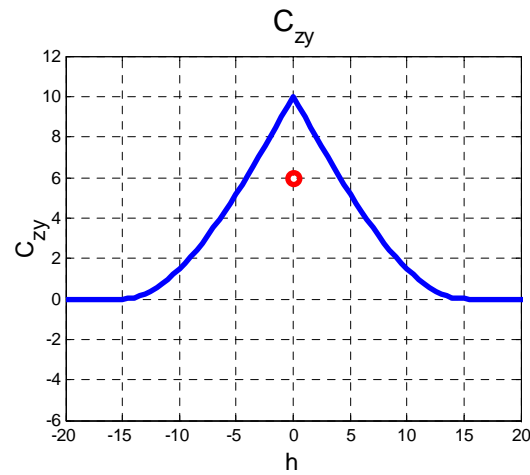
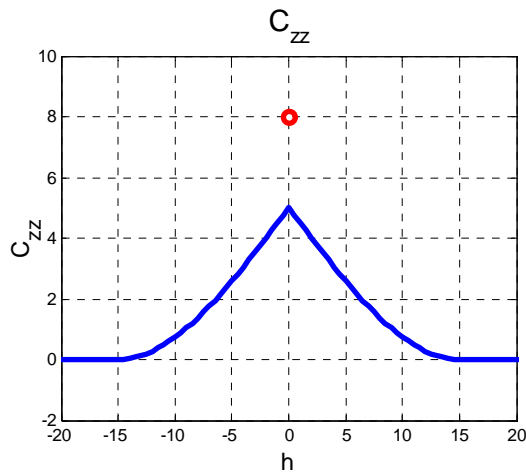
$$B_1 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 25 \end{bmatrix}$$

$$\text{Det}(B_1)=11$$

$$\text{Det}(B_2)=25$$

=> modèle
admissible



Effet pépite+

Modèle sphérique
 $a=15$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 25 \end{bmatrix}$$

$$\text{Det}(B_1) = -1$$

$$\text{Det}(B_2) = 25$$

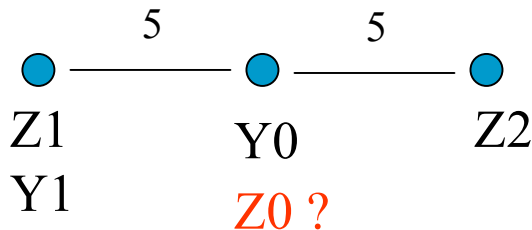
=> modèle non admissible

Exemple numérique détaillé

$$\begin{bmatrix} C_{zz}(h) & C_{zy}(h) \\ C_{yz}(h) & C_{yy}(h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \delta(h) + \begin{bmatrix} 2 & 2.4 \\ 2.4 & 4 \end{bmatrix} \text{Sphérique}(a = 30m, C = 1)$$

$\delta(h) = 1$ si $h=0$, 0 si $|h|>0$.

Z_1 et Y_1 en $x_1=0$, Z_2 en $x_2=10$ et Y_0 en $x_0=5$



Note: à $h=0$, corr. $(Z,Y) = 2.4/(3*5)^{0.5} = 0.62$
À $h=5$, corr($Z(x), Z(x+h)$) = $1.50/3 = 0.50$

Par cokrigage simple

$$\begin{array}{c}
 Z_1 \\
 Z_2 \\
 Y_1 \\
 Y_0
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 Z_1 & Z_2 & Y_1 & Y_0 \\
 3 & 1.037 & 2.4 & 1.8056 \\
 1.037 & 3 & 1.2444 & 1.8056 \\
 2.4 & 1.2444 & 5 & 3.0093 \\
 1.8056 & 1.8056 & 3.0093 & 5
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \lambda_{1,z} \\
 \lambda_{2,z} \\
 \lambda_{1,y} \\
 \lambda_{0,y}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 Z_0 \\
 1.5046 \\
 1.5046 \\
 1.8056 \\
 2.4
 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{1,z} = 0.2294, \lambda_{2,z} = 0.2336, \lambda_{1,y} = 0.0072, \lambda_{0,y} = 0.3085 \text{ et } \sigma_{ck}^2 = 1.5500$$

Poids important donné à la variable secondaire

Variance de cokrigage < variance de krigeage simple (1.88)

Par cokrigage ordinaire

$$\begin{array}{c}
 Z_1 \\
 Z_2 \\
 Y_1 \\
 Y_0
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 Z_1 \quad Z_2 \quad Y_1 \quad Y_0 \\
 \left[\begin{array}{cccccc}
 3 & 1.037 & 2.4 & 1.8056 & 1 & 0 \\
 1.037 & 3 & 1.2444 & 1.8056 & 1 & 0 \\
 2.4 & 1.2444 & 5 & 3.0093 & 0 & 1 \\
 1.8056 & 1.8056 & 3.0093 & 5 & 0 & 1 \\
 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0
 \end{array} \right]
 \begin{array}{c}
 \lambda_{1,z} \\
 \lambda_{2,z} \\
 \lambda_{1,y} \\
 \lambda_{0,y} \\
 \mu_z \\
 \mu_y
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 Z_0 \\
 \left[\begin{array}{c}
 1.5046 \\
 1.5046 \\
 1.8056 \\
 2.4 \\
 1 \\
 0
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

$$\lambda_{1,z} = 0.5494, \lambda_{2,z} = 0.4506, \lambda_{1,y} = -0.1678, \lambda_{0,y} = 0.1678,$$

$$\mu_z = -0.5111, \mu_y = 0.2603 \text{ et } \sigma_{\text{ck}}^2 = 1.907$$

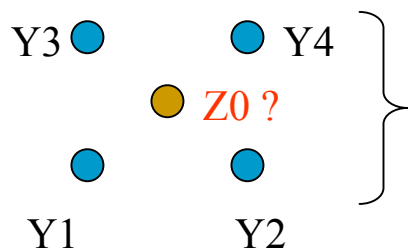
Variance de cokrigage \approx variance
de krigeage ordinaire (2.01)

Cokrigage simple (CoS) vs cokrigage ordinaire (CoO)

Souvent le CoS est préférable

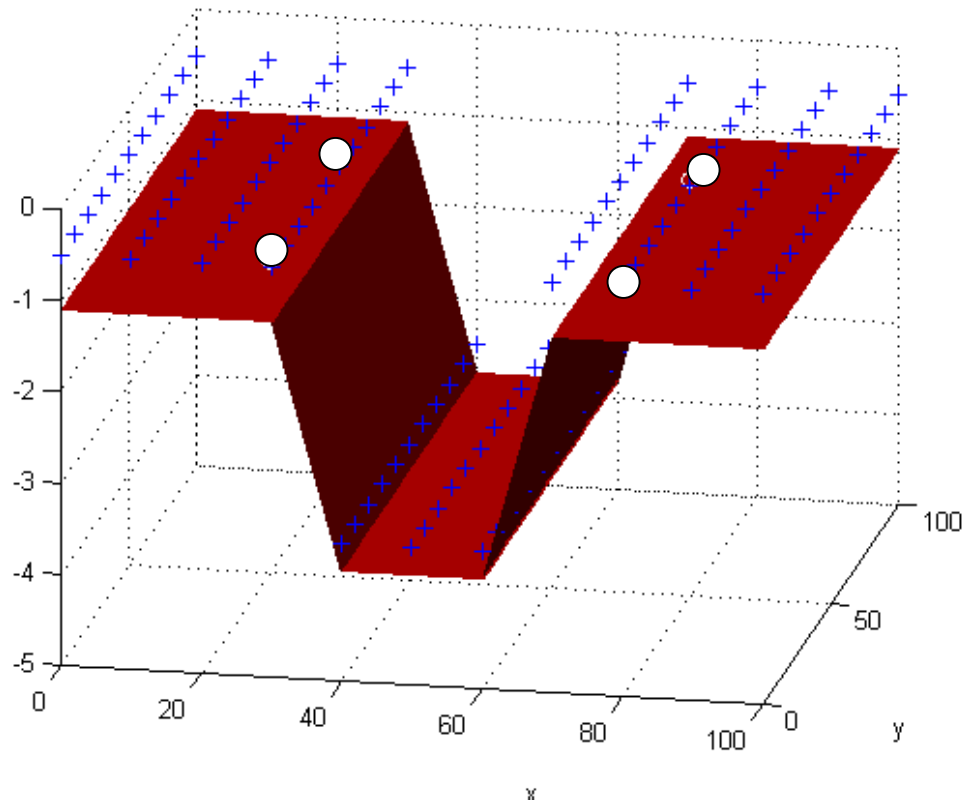
- CoS => ne nécessite pas d'observations de Z
- CoO => dans certaines configurations symétriques, la contrainte sur les poids empêche de tenir compte de l'information de la variable secondaire

Ex.

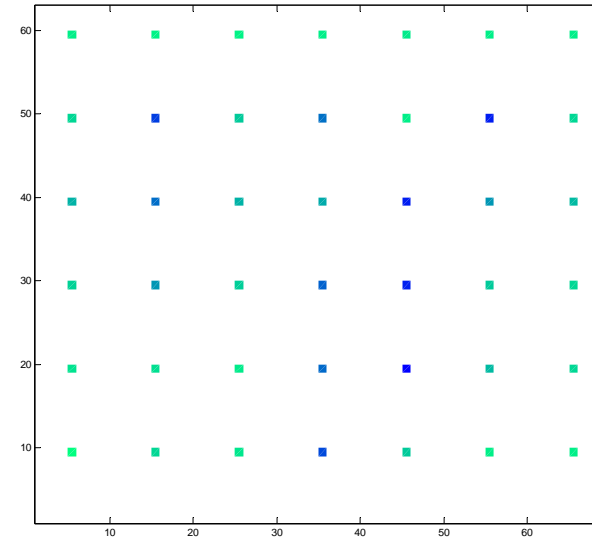
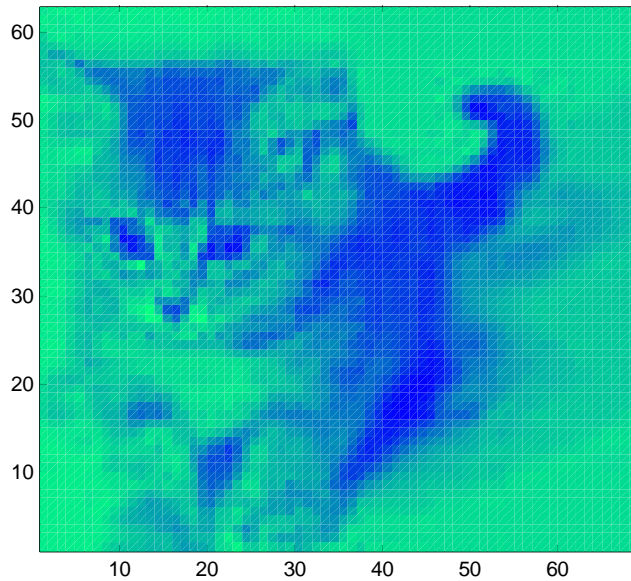


Dans cette configuration, tous les poids sur Y sont 0, peu importe la corrélation entre Z et Y !

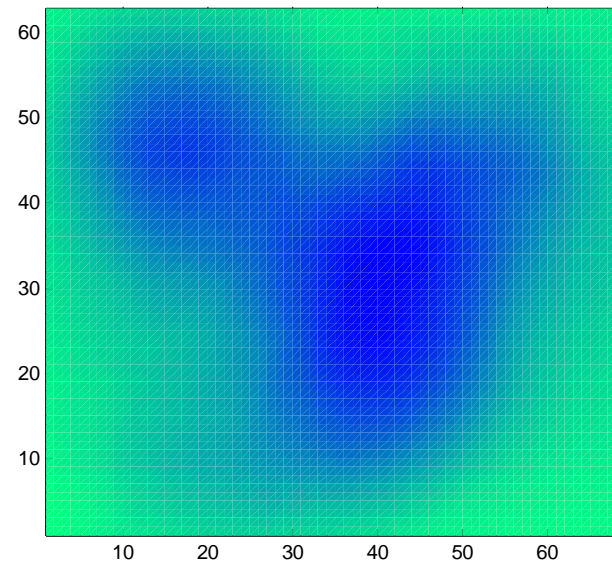
Exemple



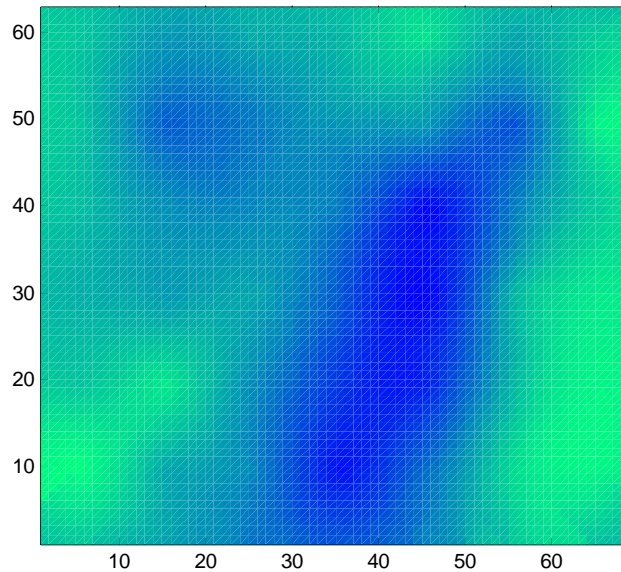
Exemple



V.P.

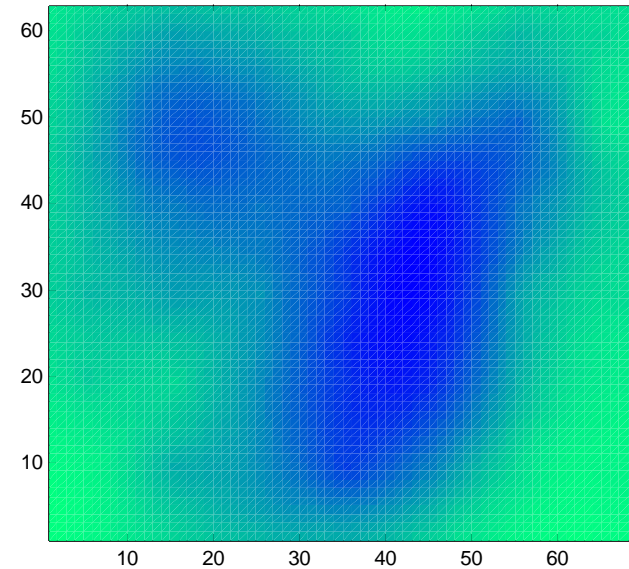


V.S.



Krigeage : MAE = 26.3

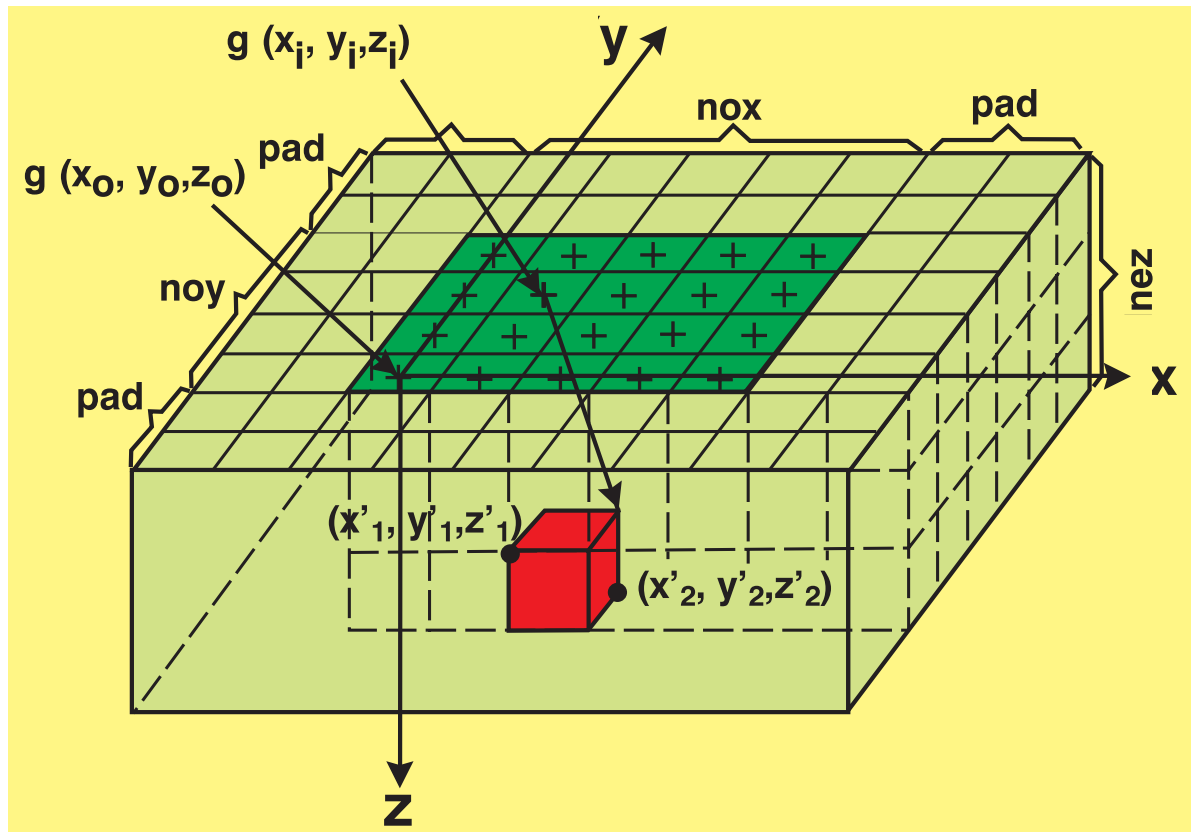
$\text{Corr}(Z, Z^*) = 0.73$



Cokrigeage simple : MAE = 22.1

$\text{Corr}(Z, Z^*) = 0.81$

Inversion de données gravimétriques



$$\frac{g_i}{\rho_j} = -\gamma \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 \sum_{r=1}^2 \mu_{pqs} \left[x'_p \ln(y'_q + r_{pqs}) + y'_q \ln(x'_p + r_{pqs}) - z'_s \arctan \left(\frac{x'_p y'_q}{z'_s r_{pqs}} \right) \right]$$

Sous forme matricielle :

$$g = G\rho$$

où

g est le vecteur des anomalies gravimétriques ($n \times 1$)

G est la matrice géométrique ($n \times m$)

ρ est le vecteur des contrastes de densité de blocs ($m \times 1$)

Les covariances s'écrivent alors :

$$C_{gg} = GC_{\rho\rho}G^T$$

$$C_{g\rho} = GC_{\rho\rho}$$

où

C_{gg} matrice des covariances gravité-gravité (n x n)

$C_{\rho\rho}$ matrice des covariances densité-densité (m x m)

$C_{g\rho}$ matrice des covariances gravité-densité (n x m)

G matrice géométrique (n x m)

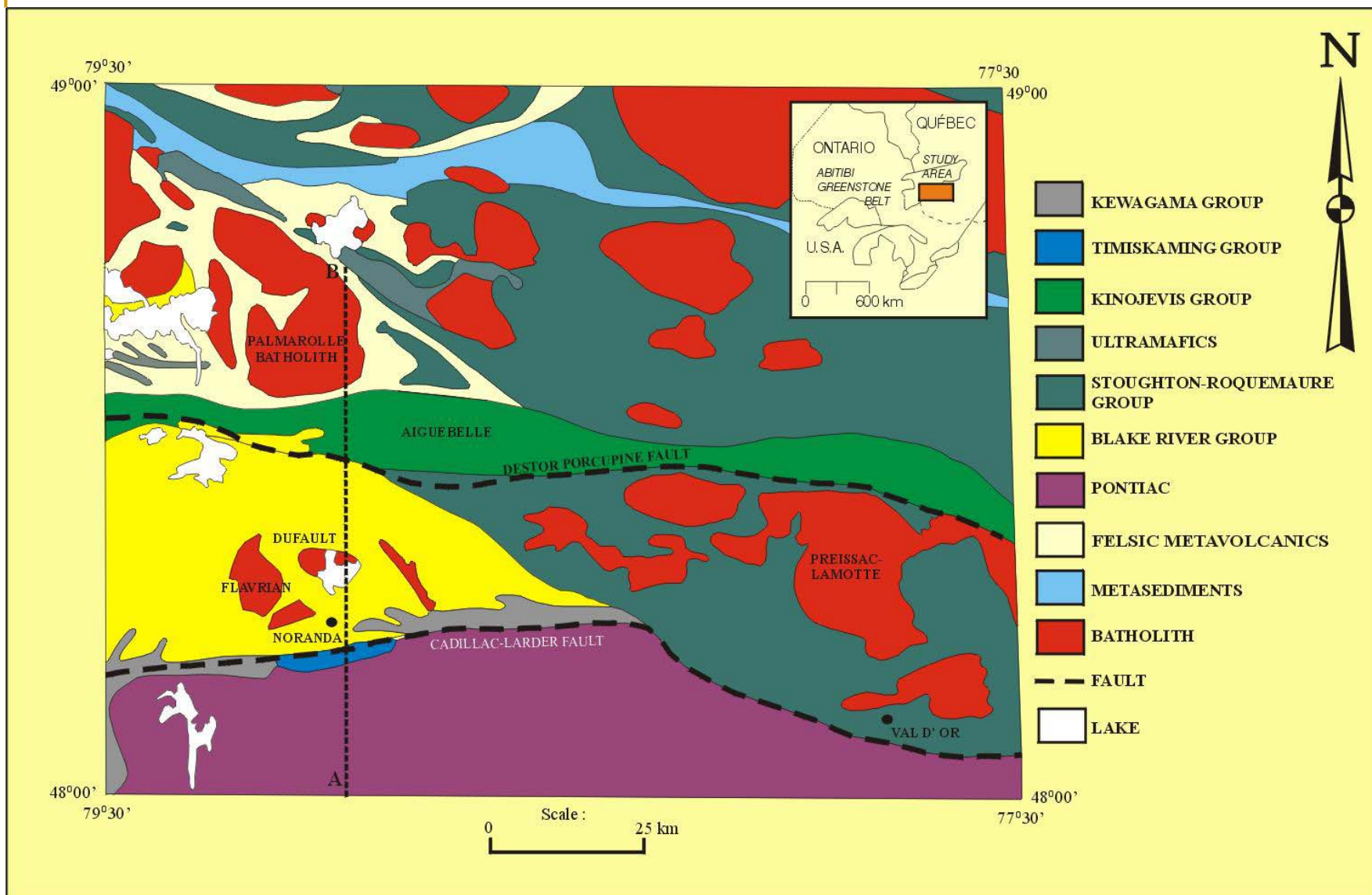
Le cokrigage s'écrit :

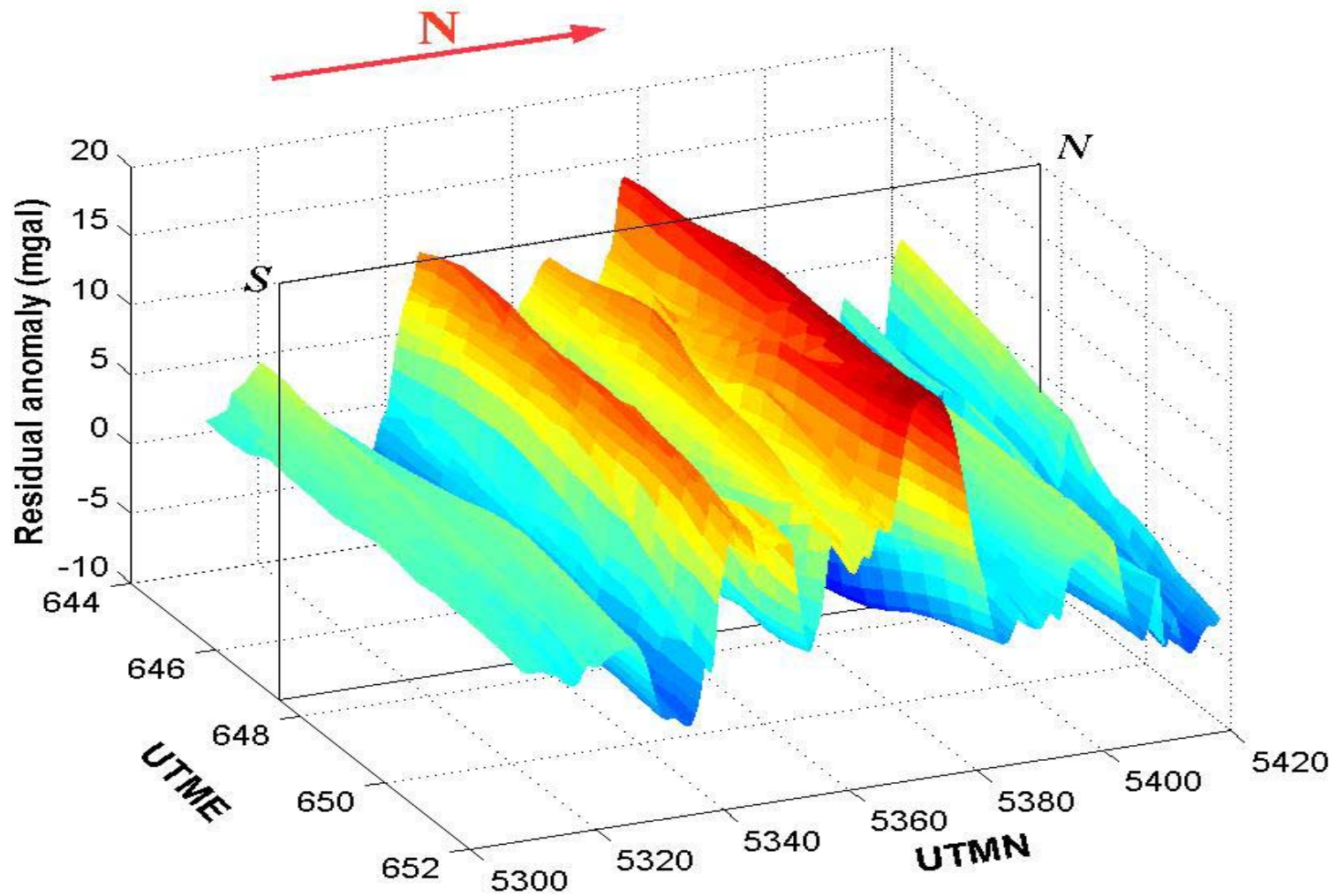
$$\rho^* = \Lambda' g$$
$$\Lambda = C_{gg}^{-1} C_{g\rho}$$

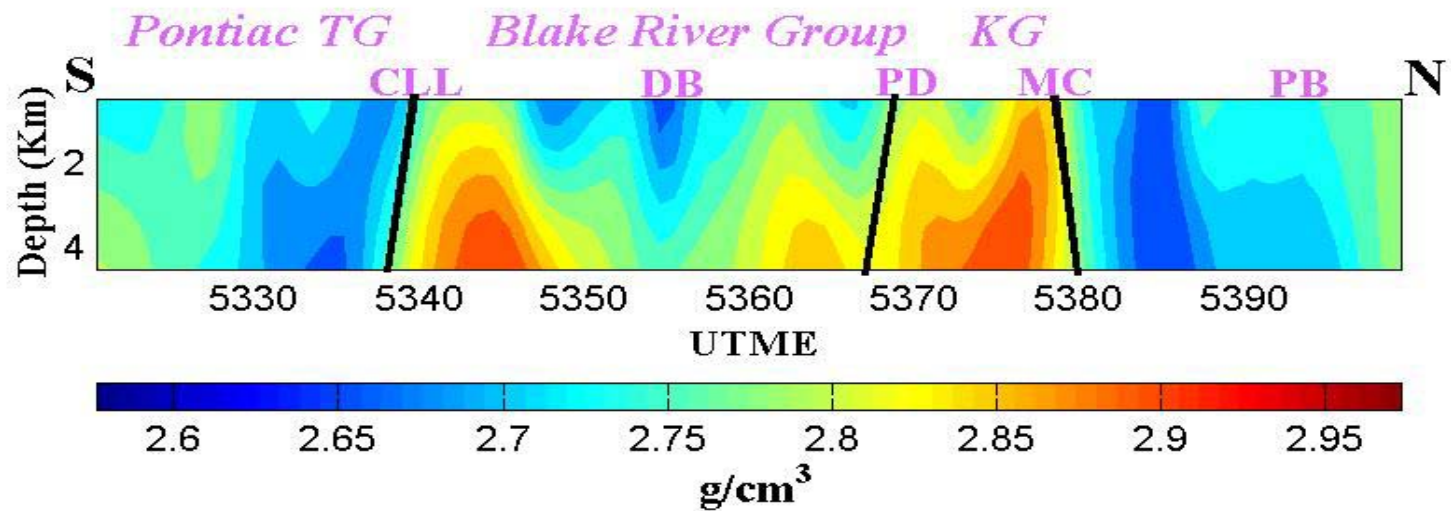
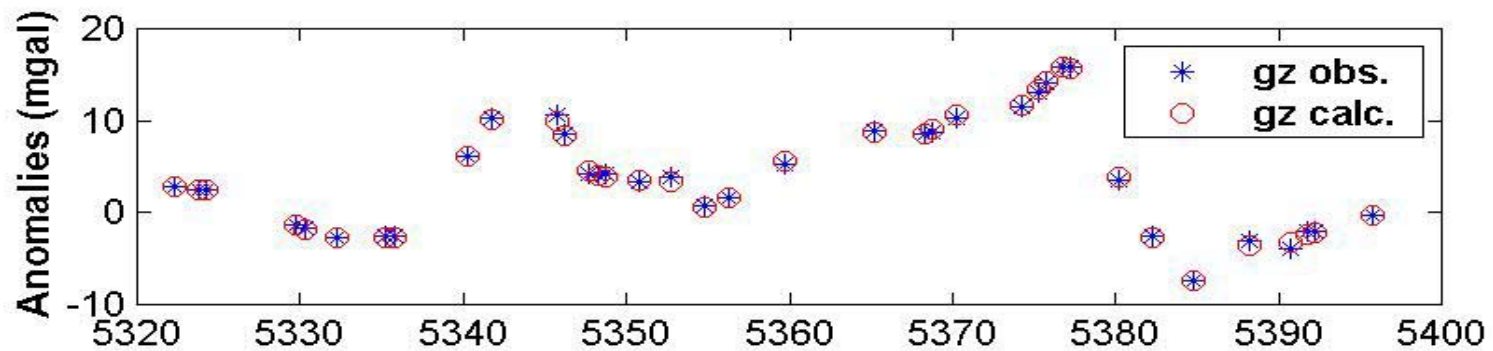
où Λ est la matrice contenant les poids de cokrigage
(n x m)

L'estimation par cokrigage des densités reproduit exactement l'anomalie gravimétrique observée i.e:

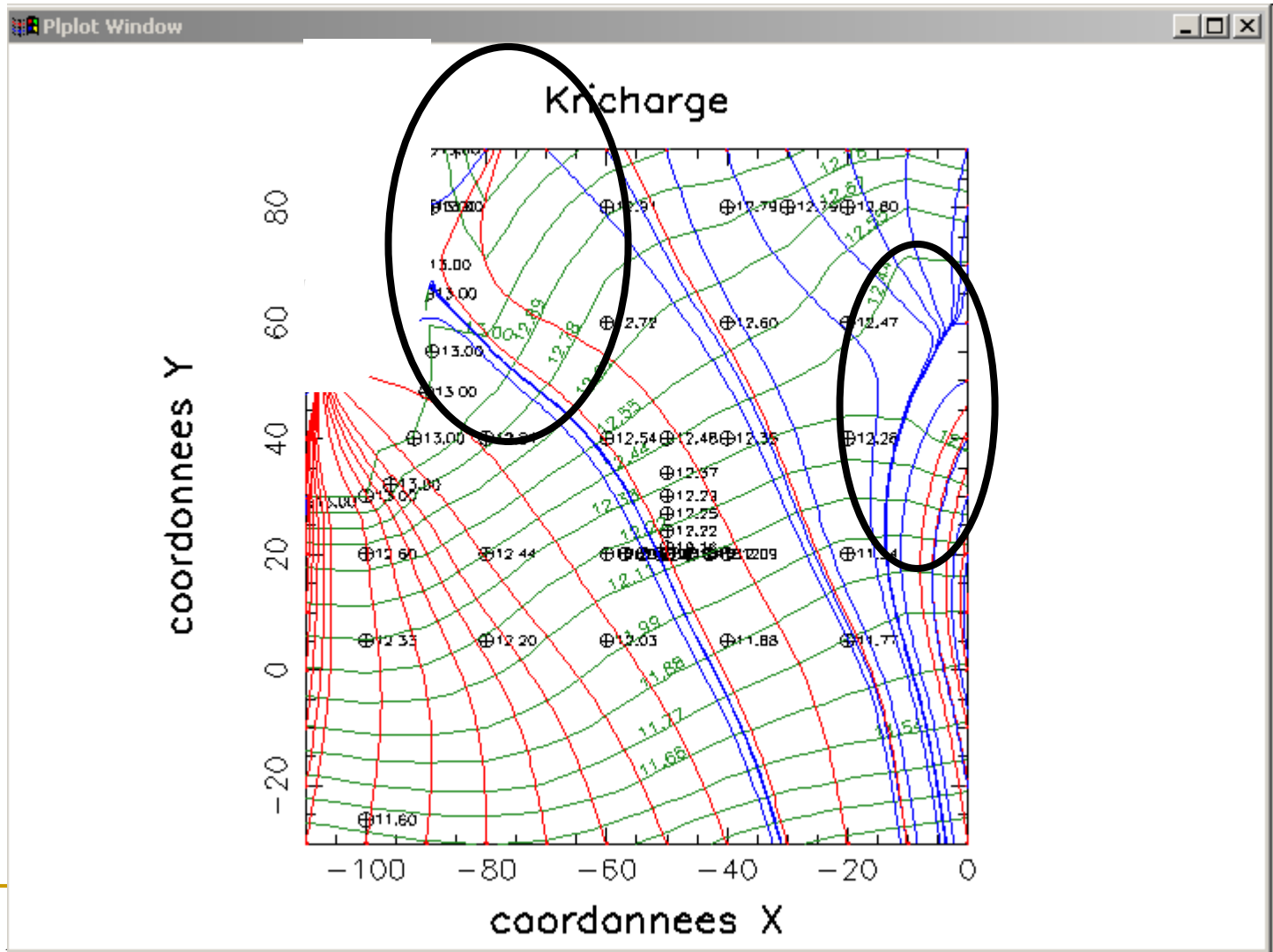
$$g^* = G\rho^* = GC_{\rho\rho}G'(GC_{\rho\rho}G')^{-1}g = g$$



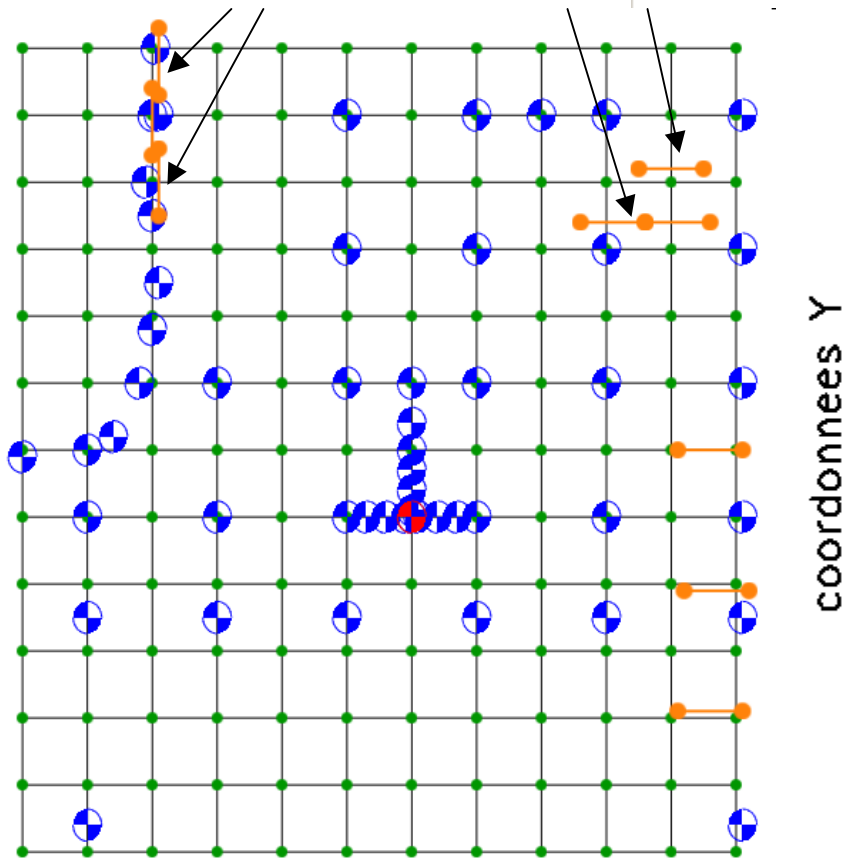




Exemple en hydrogéologie

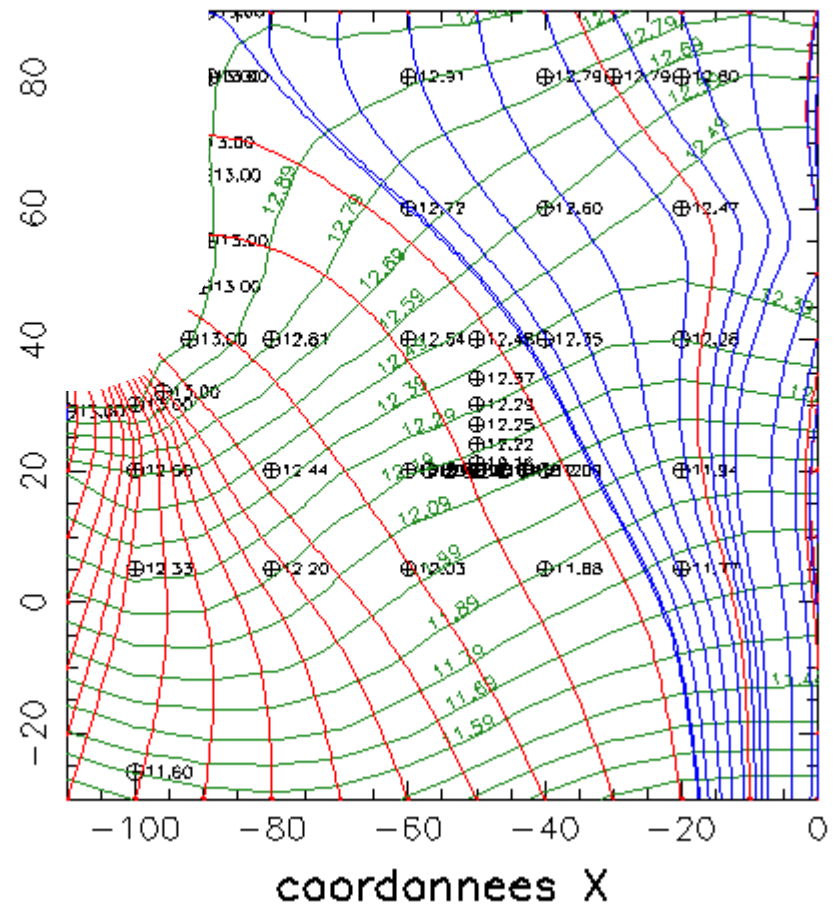


Utilisation de points doublons :
forcer localement une direction
d'écoulement

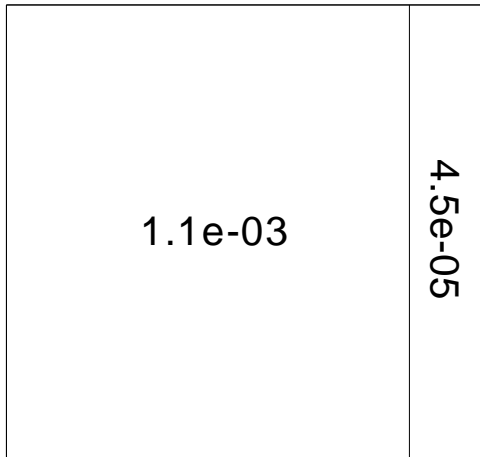


coordonnées Y

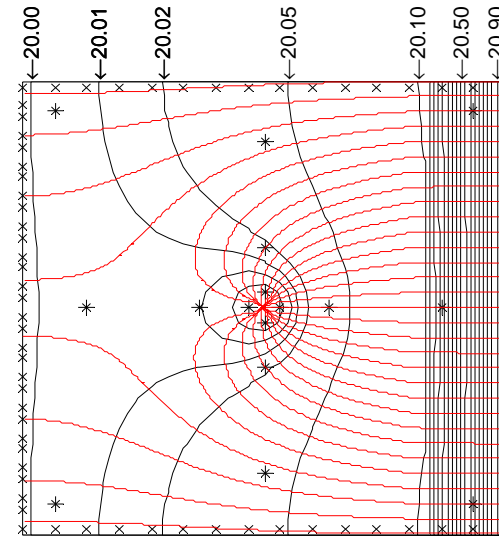
Kricharge



A)

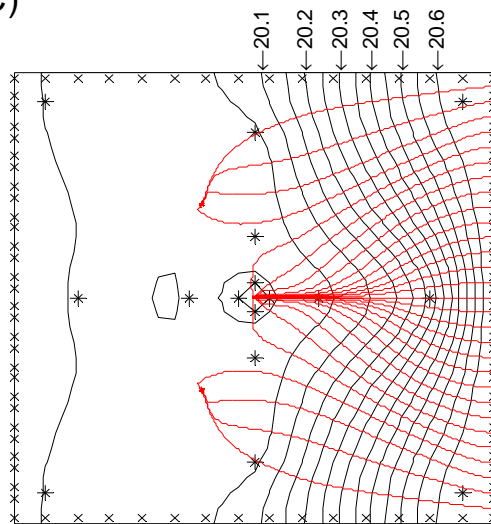


B)



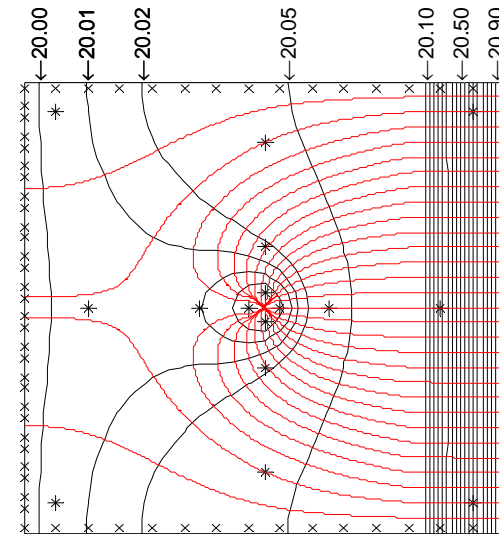
Solution
analytique

C)



Cokrigage 1

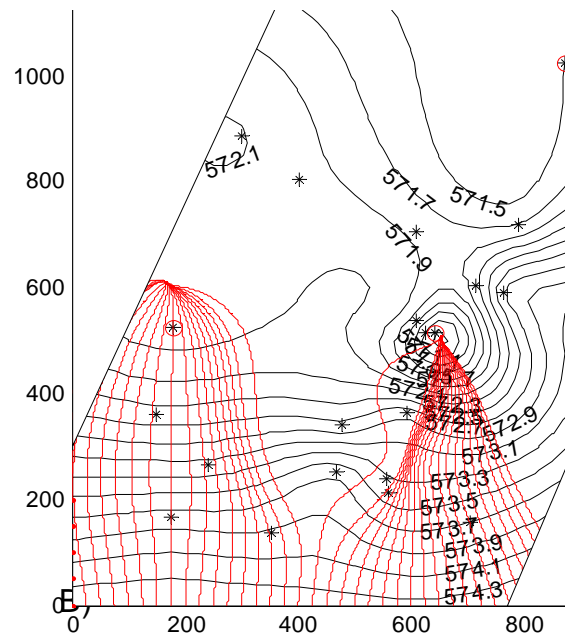
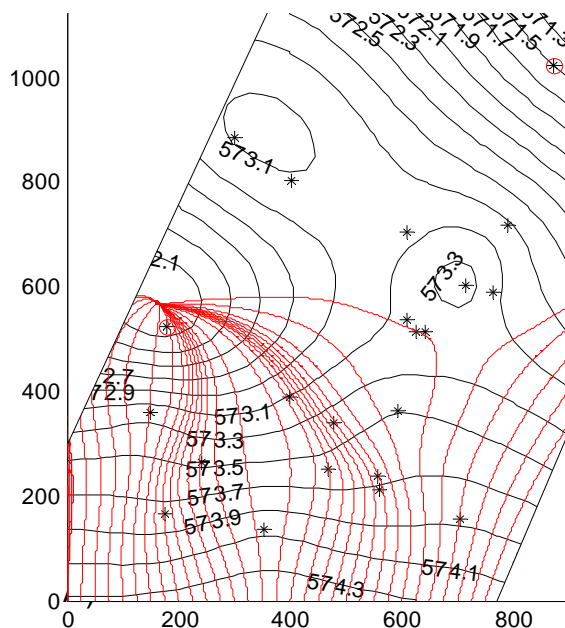
D)



Cokrigage 2

Dizy, repos

Sans
doublons

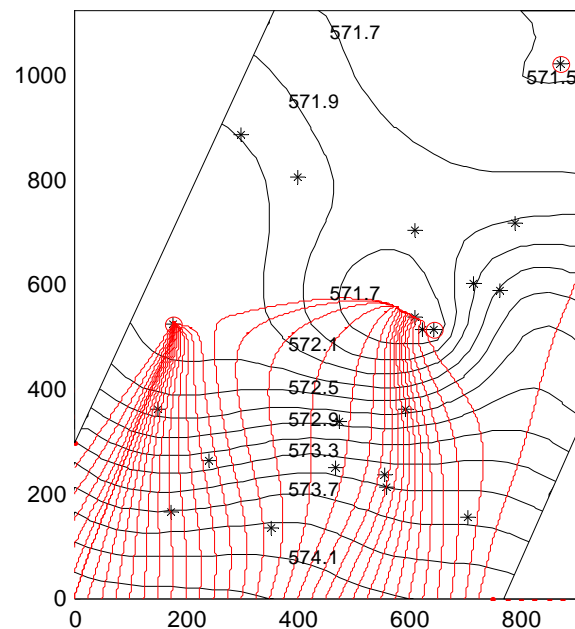
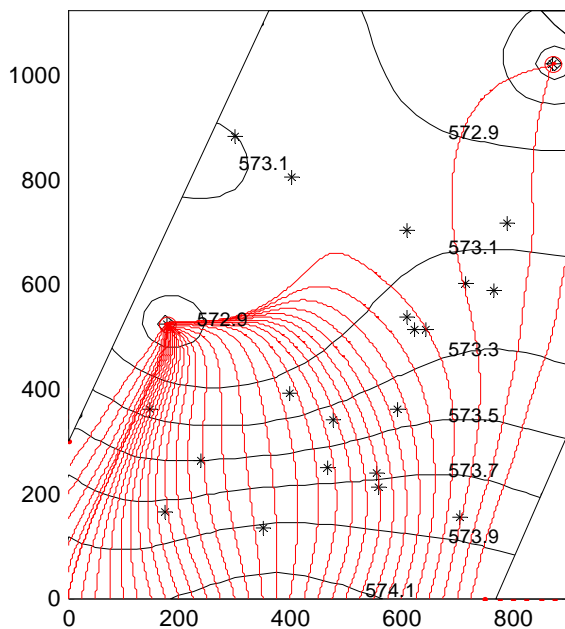


Dizy,
pompage

Sans
doublons

Dizy, repos

Avec
doublons



Dizy,
pompage

Avec
doublons